Office – Peters

Physikalische Zeitschrift

Oberlin College Library
AUG 10 1925

begründet von E. Riecke und H. Th. Simon

vereinigt mit dem

Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik

begründet von Johannes Stark

Herausgeber:

Prof. Dr. **P. Debye**, Prof. Dr. **F. Harms** und Prof. Dr. **R. Seeliger**

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von drei bis vier Bogen und wird vierteljährlich für Goldmark 11.— postfrei geliefert. Für das Ausland beträgt der Preis $ 3.— vierteljährlich. Für die Mitglieder der Deutschen Physikalischen Gesellschaft im Inland Goldmark 9.—, im Ausland $ 2.60. Bestellungen nehmen jede Buchhandlung sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Millimeterzeile mit Goldmark —.35, Beilagen mit Goldmark 60.— berechnet.

Alle Manuskripte und darauf bezügliche Zuschriften sind an Prof. Dr. F. Harms, Würzburg, Bismarckstr. 1, zu senden, mit Ausnahme der zusammenfassenden Berichte, deren Redaktion Prof. Dr. R. Seeliger, Greifswald, Loitzerstr. 43, führt. Büchersendungen und Anzeigen-Aufträge direkt an den Verlag.

No. 12. Ausgegeben am 21. Juli 1925. No. 688. Printed in Germany. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Alexandrow, Über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf die elektromagnetischen Erscheinungen.

C. Benedicks u. G. Phragmén, Über das Drosselkreuz im Hochvakuum.

Zusammenfassende Berichte:

G. Wentzel, Die Theorien des Compton-Effektes. I.

Besprechungen:

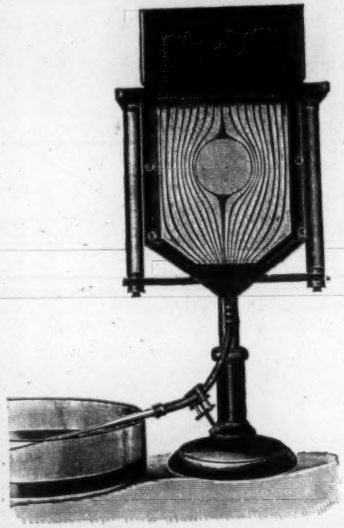
W. Heiskanen, Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie.

M. Lecat, Bibliographie de la Relativité.

Tagesereignisse. Personalien. Angebote.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Mit einer Beilage von der Quarzlampen-Gesellschaft m. b. H., Hanau a. M., betreffend: Die Analysen-Quarzlampe.



Spindler & Hoyer

G. m. b. H.

Mechanische und Optische Werkstätten

Göttingen 3.

Demonstrationsapparate zur Hydrodynamik

nach Prof. R. Pohl

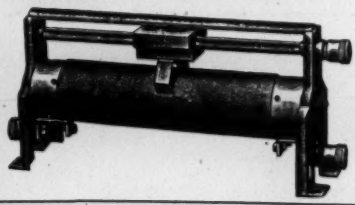
Stromlinienapparat

wie Abbildung

Schleppversuch-Apparat

Preislisten kostenlos

PHYWE - **Gleitwiderstände**



Absolut zuverlässig

Denkbar einfach — Unerreicht billig

Verlangen Sie Liste PZW.

Physikalische Werkstätten A.-G.

Göttingen

Dr. Steeg & Reuter ~ Bad Homburg vor der Höhe

Kristalloptik

Polarisations-Prismen — Polarisations-Instrumente — Spektralprismen aus Quarz und Glas

Eingegangene Bücher.

Eingehende Besprechung vorbehalten. Rücksendung nicht besprochener Bücher erfolgt in keinem Falle.

Auerbach, F., Das Zeißwerk und die Carl-Zeiß-Stiftung in Jena, ihre wissenschaftl., techn. u. soziale Entwicklg. u. Bedeutg. 5. umgearb. Aufl. gr. 8°. 252 Abb. u. 1 [Titel-] Bildn. v. Abbe [u. 1 Tafel]. Jena, G. Fischer. 1925. Geh. M. 6.—, geb. M. 8.—.

Brill, A., Vorlesungen über ebene algebraische Kurven und algebraische Funktionen. gr. 8°. X u. 340 S. Mit 126 Abb. Braunschweig, F. Vieweg & Sohn. 1925. Geh. M. 17.50, geb. M. 20.—.

Conrad-Martius, H., Realontologie. I. Buch. 8°. III u. 175 S. Halle a. S., M. Niemeyer. 1924. M. 6.—.

Gräter, A. S., Das Welt- und Gottesrätsel oder das Problem von Stoff und Kraft, Materie und Geist, Raum und Zeit, Leib und Seele, Leben und Bewußtsein, Diesseits und Jenseits, Geschöpf und Gott. 8°. 60 S. Selbstverlag, Stuttgart, Paulinenstr. 22. M. 2.—.

Greinacher, H., Über die Konstitution der Elektrizität. 8°. 23 S. Bern, P. Haupt. 1925. M. —.80.

Jahresberichte des Literarischen Zentralblattes über die wichtigsten wissenschaftlichen Neuerscheinungen des gesamten deutschen Sprachgebietes. Hrsg. von W. Freis. 8°. 1. Jahrgang (Bd. 1—24). Bd. 20. Leipzig, Verlag [Geschäftsstelle] d. Börsenvereins d. Deutschen Buchhändler. 1925. M. 3.50.

Kultur der Gegenwart. 3. Teil. 3. Abteilg., 1. Bd.: Physik. 2. neubearb. u. erw. Aufl. unter Red. von E. Lecher. 4°. VIII u. 849 S. Mit 116 Abb. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1925. Geh. M. 34.—, geb. M. 36.—.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

ISOTOPE

von **Prof. Dr. F. W. Aston, Cambridge.**

Autorisierte Übertragung ins Deutsche von Dr. Else Norst-Rubinowicz.
IX u. 162 S. mit Register. Mit 21 Figuren im Text, 4 Tafeln und einem Bildnis des Verfassers.
Geh. M. 4.—, geb. M. 5.—.

Aus dem Inhalt: Einleitung: Die Hypothesen von Dalton und Prout. Die Meta-Elemente. Die Entdeckung der Isotopen / Die radioaktiven Isotopen / Kanalstrahlen / Neon / Der Massenspektrograph / Zerlegung der Elemente / Die elektrische Theorie der Materie / Isotope und Atomnummern / Die Spektra der Isotopen / Die Trennung der Isotopen.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Neue Schriften der Sächsischen Akademie der Wissenschaften

Garten, S., Beiträge zur Vokallehre.

I. Analyse der Vokale mit dem Quinckeschen Interferenzapparat. 43 Seiten. Mit 3 Tafeln u. 3 Textfiguren. 1921. M. 3.—

II. Eigentöne der Mundhöhle bei Einstellung auf verschiedene Vokale ohne Betätigung der Stimme. 26 Seiten. Mit 1 Tafel u. 2 Textfiguren. 1921. M. 2.50.

III. Die automatische harmonische Analyse der gesungenen Vokale. 43 Seiten. Mit 4 Tafeln u. 5 Textfiguren. 1921. M. 3.50.

Rinne, Fr., Röntgenographische Feinbaustudien.

116 Seiten. Mit 32 Figuren. 1921. M. 5.—.

Weickmann, L., Wellen im Luftmeer.

Neuere Untersuchungen über Gesetzmäßigkeiten im Gange und in der Verteilung des Luftdruckes.

Erste Mitteilung: Symmetriepunkte des Luftdruckganges. Der Luftdruck als zusammengesetzte Schwingung. 48 Seiten. Mit 29 Figuren im Text und auf Tafeln. 1924. M. 3.—.

Wiener, O., Das Grundgesetz der Natur und die Erhaltung der absoluten Geschwindigkeiten im Äther.

87 Seiten. Mit 9 Abbildungen. 1921. M. 3.60.

Das führende wissenschaftliche Organ der Mikroskopie ist die

Zeitschrift für wissenschaftliche MIKROSKOPIE

und für mikroskopische Technik

Begründet von W. J. Behrens

Unter besonderer Mitwirkung von

Prof. Dr. **W. J. Schmidt** in Bonn und Dr. **R. E. Liesegang** in Frankfurt a. M.

herausgegeben von

Prof. Dr. **Ernst Küster** in Gießen

Jährlich 4 Hefte im Umfange von 7 bis 9 Bogen. Erscheint seit 1884. Der Jahrgang beginnt mit April.

Preis des laufenden (42.) Jahrgangs M. 25.— / Abonnementspreis bei direkter Zusendung im Inland M. 26.—, im Ausland $ 6.50

Die Zeitschrift für wissenschaftliche Mikroskopie bringt: Originalarbeiten aus allen einschlägigen Gebieten in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache. Zusammenfassende Berichte über die von deutschen und ausländischen Werkstätten hergestellten neuen Mikroskope und mikroskopischen Nebenapparate usw. Referate über Bücher und Abhandlungen, die Fragen der wissenschaftlichen Mikroskopie oder mikroskopischen Technik behandeln. Übersichten der gesamten neuen Literatur des In- und Auslandes.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

Elektronenröhren

von

H. Barkhausen

1. Band: **Elektronentheoretische Grundlagen. Verstärker.** Zweite, umgearbeitete Auflage. VI und 140 Seiten. Mit 54 Abbildungen. 8°. 1924. Geh. M. 4.—, Halbleinenband M. 5.—.

Dieses Buch ist den besten Werken der gesamten Radioliteratur zuzuzählen. Es nimmt auch innerhalb des engeren Rahmens der Buchdarstellung über die Elektronenröhren durch die Klarheit der Betrachtung und der genügend erschöpfenden Behandlung des Stoffes eine besondere Stelle ein. Auf das Buch hat die Fachwissenschaft mit Spannung gewartet, da der Verfasser die Möglichkeit gehabt hat, auf dem Gebiete Erfahrungen zu sammeln, wie sie nur wenigen in Deutschland zuteil geworden sind.
(Literar. Ratgeber f. d. Katholiken Deutschlands.)

2. Band: (Verstärker für große Leistungen — Sender mit Fremderregung — Theorie der Selbsterregung — Senderschaltungen und Betrieb — Dämpfungsminderung — Gleichrichter, Audion, Schwingaudion — Empfängerschaltungen.) In Vorbereitung.

VERLAG VON S. HIRZEL IN LEIPZIG

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

No. 12. 15. Juni 1925. Redaktionsschluß für No. 14 am 5. Juli 1925. 26. Jahrgang.

INHALT:

Originalmitteilungen:

W. Alexandrow, Über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf die elektromagnetischen Erscheinungen. S. 425.

C. Benedicks u. G. Phragmén, Über das Drosselkreuz im Hochvakuum. S. 434.

Zusammenfassende Berichte:

G. Wentzel, Die Theorien des Compton-Effektes. I. S. 436.

Besprechungen:

W. Heiskanen, Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. S. 455.

M. Lecat, Bibliographie de la Relativité. S. 455.

Tagesereignisse. S. 456.

Personalien. S. 456.

Angebote. S. 456.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über den Einfluß des Gravitationsfeldes auf die elektromagnetischen Erscheinungen.

Von W. Alexandrow.

Einleitung. Differentialgleichungen des Problems.

In der letzten Zeit ist die kosmologische Frage wieder Gegenstand der Diskussionen gewesen. Namentlich ist Weyl in seinen letzten Publikationen über die Relativitätstheorie[1]) sehr überzeugend für die de Sittersche Kosmologie eingetreten und sie neu belebt. Im engen Zusammenhang damit steht die Frage nach der Relativität der Bewegung. Es ist von verschiedenen Seiten, besonders scharf in den zitierten Arbeiten von Weyl, betont worden, daß in der allgemeinen Relativitätstheorie auch der Begriff der Relativbewegung seine Bedeutung verliert. Solange nämlich das metrische Feld nicht da ist, hat die Bewegung überhaupt keinen Sinn. Ist aber das Feld vorhanden, so kann man auch über die absolute Bewegung und Ruhe sprechen; denn es ist dann bereits entschieden, was sich bewegt und was ruht (relativ zum Feld). Nimmt man z. B. die bekannte Thirringsche Hohlkugel, so bewegt sie sich sicher relativ zum Gravitationsfeld und kann keineswegs wie der Sternhimmel als ruhend betrachtet werden (der Himmel ruht aber relativ zum Feld). Solche Fälle, wie sie Thirring betrachtete[2]), können heute nicht mehr als Beweise für die Relativität der Bewegung angesehen werden[3]) (und ich benutze diese Gelegenheit, um alle ähnlichen Aussprüche meiner früheren Arbeiten zurückzunehmen).

Aber derartige Induktionswirkungen der Massen existieren doch; und es scheint mir gerade jetzt aktuell, die Untersuchungen von Thirring namentlich über die Mechanik hinaus auf die Elektrodynamik auszudehnen, und vor allem zu untersuchen, inwiefern diese Induktionswirkungen nicht reziprok sind, inwiefern also hier nicht von der Relativität der Bewegung die Rede sein kann.

Die allgemeine Grundlage für solche elektrodynamischen Untersuchungen ist in meinen früheren Arbeiten[1]) enthalten. In der vorliegenden Arbeit sollen konkrete Fälle mit vollständig durchgeführten Lösungen behandelt werden, welche die Modifikationen des elektromagnetischen Feldes durch das (schwache) Gravitationsfeld gut illustrieren dürften; es handelt vor allem vom Magnetfeld und dem elektrostatischen Feld der ruhenden geladenen Kugeloberfläche (oder eines Ringes) im stationären Gravitationsfeld rotierender Massen.

In den erwähnten Arbeiten habe ich allgemein die Differentialgleichungen der Elektrodynamik im schwachen Gravitationsfelde abgeleitet. Diese sollen zunächst (in etwas veränderter Fassung) kurz zusammengefaßt und im I. Teil diskutiert werden; im II. Teil wird dann die oben beschriebene Aufgabe in Angriff genommen und gelöst werden.

Ist $\mathfrak{E}_0, \mathfrak{B}_0$ das „Anfangsfeld", d. h. das nach den gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen bei aufgehobener Gravitation aus der Ladung ϱ

1) Vgl. vor allem die 5. Auflage von „Raum-Zeit-Materie" (J. Springer, 1923) und die scharfe Fassung in den schönen Dialogen im Buche „Was ist Materie?" (J. Springer, 1924). Ferner: Physik. Zeitschr. **24**, 230 u. 130, 1923; Phil. Mag. **48**, 348, 1924.

2) Physik. Zeitschr. **19**, 33 u. 156, 1918 mit Berichtigung **22**, 29, 1921.

3) Wie mir Prof. Weyl mitteilte, hält Thirring selbst nicht mehr daran fest.

1) Ann. d. Phys. **65**, 675, 1921; Physik. Zeitschr. **22**, 593, 1921; auch Ann. d. Phys. **72**, 141, 1923.

und dem Strom i berechnete Feld; führt man ferner ein, den Vektor $\mathfrak{v}$ „Geschwindigkeit" mit den Komponenten

$$v^i = -g^{0i}:$$

ferner die Größen

$$\Phi = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{g}\, g^{00} g^{11}) \text{ und}$$

$$\Psi = -\tfrac{1}{2}(1 - \sqrt{g}\,(g^{11})^2)$$

(die im statischen Feld einfach das Newtonsche Potential darstellen), dann „Polarisation" und „Magnetisierung" durch

$$\boxed{\begin{aligned}\mathfrak{P} &= -2\Phi\mathfrak{E}_0 - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}_0] \\ \mathfrak{M} &= -2\Psi\mathfrak{B}_0 + [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]\end{aligned}} \quad \text{(I)},$$

so gelten im schwachen Gravitationsfelde die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen des inhomogenen Mediums mit

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{E} + \mathfrak{P} \qquad \mathfrak{H} = \mathfrak{B} + \mathfrak{M}$$

und der Kraftdichte

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}, \mathfrak{B}].$$

Die in den wichtigsten Fällen zutreffende Einschränkung: $g^{11} = g^{22} = g^{33}$, $g^{ik} = 0$ $(i, k = 1, 2, 3)$ (die unwesentlich ist) wird später für die Elektrostatik im stationären Gravitationsfelde vollständig aufgehoben.

$$\left|\begin{aligned}&\operatorname{rot}(\mathfrak{B} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}_0]) = \mathfrak{i} \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{E} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}_0]) = \varrho, \\ &\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}, \mathfrak{B}].$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{v}$ hier wirklich die Geschwindigkeit des Bezugssystems (als Funktion des Ortes bei kontinuumartiger Bewegung).

2. Transformiert man die Maxwellschen Gleichungen, die im Sinne von H. A. Lorentz im festen Äther gelten, unter Voraussetzung der Translation des Bezugssystems ($\mathfrak{v}$ räumlich konstant) mit Hilfe der Formel

$$\frac{d\mathfrak{a}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{a}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathfrak{v}, \mathfrak{a}] + \mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{a}$$

auf das mitbewegte System, so erhält man, wenn man auch der Kraftdichte die obige Form gibt, genau das unter 1. angeführte Gleichungssystem. Man hat also hier eine viel befriedigendere Ableitung dieses Systems bei beliebiger Kontinuumbewegung.

3. Ist $\mathfrak{v}$ auch zeitlich konstant, so ist die obige Darstellung des Sachverhaltes im Einsteinschen Sinne unsachgemäß, da alle derartige Bezugssysteme gleichberechtigt sind. Es ist jedoch interessant, den Zusammenhang der beiden Darstellungen festzustellen. Es kommt das nämlich auf die Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung hinaus. Betrachten wir nämlich die Einsteinschen Gleichungen im gestrichenen System. Es ist $\varrho' \sim \varrho$; so daß als Ladung und Strom ϱ und $\mathfrak{i}'$ zu betrachten ist. Es ist aber auch

$$\mathfrak{E}' \sim \mathfrak{E} + [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}], \quad \mathfrak{B}' \sim \mathfrak{B} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}].$$

Die Rotationsgleichungen müssen wir aus dem gestrichenen System übernehmen, wobei in den nach t' differenzierten Gliedern einfach $\mathfrak{E}' \sim \mathfrak{E}$, $\mathfrak{B}' \sim \mathfrak{B}$ gesetzt werden darf. Die Divergenzgleichungen müssen aus dem ungestrichenen System übernommen werden. Nun ist aber die Kraftdichte

$$\mathfrak{p}' \sim \varrho\mathfrak{E}' + [\mathfrak{i}', \mathfrak{B}].$$

Als elektrische Feldstärke tritt also doch $\mathfrak{E}'$ auf. Ersetzen wir also überall $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E}' - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]$ und lassen dann alle Striche weg, so haben wir das System unter 1. Dieses ist also auch hier eine mögliche Darstellung. Was aber allgemein gut ist, erweist sich bei gleichförmiger Translation als höchst unzweckmäßig.

I. Diskussion der Differentialgleichungen und allgemeine Sätze über ihre Lösungen.

§ 1. „Spezielle" Gravitationsfelder. Vergleich mit H. A. Lorentz und Einstein.

1. Für die angeführten Felder (die durch Bewegung des Bezugsmollusken entstehen) nehmen unsere Gleichungen folgende Form an: $\Phi = \Psi = 0$

$$\left|\begin{aligned}&\operatorname{rot}(\mathfrak{B} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathfrak{E} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}_0]) = \mathfrak{i} \qquad \operatorname{div}(\mathfrak{E} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}_0]) = \varrho, \\ &\operatorname{rot}\mathfrak{E} + \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0,\end{aligned}\right.$$

$$\mathfrak{p} = \varrho\mathfrak{E} + [\mathfrak{i}, \mathfrak{B}].$$

Nun ist aber die Kraftdichte

$$\mathfrak{p}' \sim \varrho\mathfrak{E}' + [\mathfrak{i}', \mathfrak{B}].$$

Als elektrische Feldstärke tritt also doch $\mathfrak{E}'$ auf. Ersetzen wir also überall $\mathfrak{E}$ durch $\mathfrak{E}' - [\mathfrak{v}, \mathfrak{B}]$ und lassen dann alle Striche weg, so haben wir das System unter 1. Dieses ist also auch hier eine mögliche Darstellung. Was aber allgemein gut ist, erweist sich bei gleichförmiger Translation als höchst unzweckmäßig.

§ 2. Elektrostatik im stationären Gravitationsfelde. Satz über das rotationssymmetrische „Anfangsfeld" im Gravitationsfeld rotierender Massen.

1. Im stationären Gravitationsfelde und mit $\mathfrak{B}_0 = 0$ (Elektrostatik) nehmen unsere Gleichungen (I) folgende Gestalt an:

$$\boxed{\begin{aligned}\operatorname{rot}(\mathfrak{B} - [\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]) &= 0 \\ \operatorname{div}\mathfrak{B} &= 0\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathfrak{E} &= 0 \\ \operatorname{div}(\mathfrak{E} - 2\Phi\mathfrak{E}_0) &= \varrho\end{aligned}} \quad \text{(II)}.$$

Die Gleichungen sind so geschrieben, um zu betonen, daß das magnetische und das elektrische Feld sich getrennt bestimmen.

Läßt man die in der Einleitung erwähnte Einschränkung fallen, so muß man nur die

letzte Divergenzgleichung abändern, und zwar so: man führe jetzt

$$\Phi^i = \tfrac{1}{2}(1 + \sqrt{g}\, g^{00} g^{ii})$$

ein, und die Vektoren $\mathfrak{E}_{f0}$ und $\overline{\mathfrak{E}}_0$ mit den Komponenten

$$\Phi^i E_0^i \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k \neq i}^{1,2,3} g^{ik} E_0^k;$$

die elektrische Divergenzgleichung lautet dann:

$$\boxed{\operatorname{div}(\mathfrak{E} - 2\mathfrak{E}_{f0} - \overline{\mathfrak{E}}_0) = \varrho} \qquad \text{(IIa)}.$$

Bei flächenhafter Elektrizitätsverteilung müssen wir noch die allgemeine Sprungbedingung angeben. Diese liest man sofort aus den Gleichungen ab. In der folgenden Tabelle ist für $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{E}$ eine gegebene Größe angeführt, deren Sprung sie besitzen:

	normal	tangential
$\mathfrak{B}$	0	$[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]$
$\mathfrak{E}$	$\mathfrak{E}_0 + 2\mathfrak{E}_{f0} + \overline{\mathfrak{E}}_0$	0

(III).

Die Potentiale φ und $\mathfrak{f}$ besitzen keinen Sprung.

2. Satz. Voraussetzung:

a) Gravitationsfeld „rotierender Massen". Darunter verstehen wir ein Feld, für welches $\mathfrak{v}$ von der Form ist

$$\mathfrak{v} = k[\mathfrak{e}_z \mathfrak{r}] \qquad (1)$$

mit den Komponenten $(-ky, kx, 0)$, wo k zunächst eine Konstante[1]) sein soll. Es ist dann:

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0 \qquad \operatorname{rot}\mathfrak{v} = 2k \cdot \mathfrak{e}_z,$$

wie bei einem um die z-Achse mit der Winkelgeschwindigkeit k rotierenden starren Körper.

b) Das „Anfangsfeld" ($\operatorname{rot}\mathfrak{E}_0 = 0$) ist rotationssymmetrisch (die Ladungen sind rotationssymmetrisch verteilt). Da dann $\mathfrak{E}_0$ in der Meridianebene liegt, $\mathfrak{v}$ aber zu dieser $\perp$ steht, ist dann $(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{v}) = 0$.

Behauptung: $\operatorname{rot}[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0] = \varrho\mathfrak{v}$. Für das Magnetfeld gilt also:

$$\boxed{\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \varrho\mathfrak{v} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0} \qquad \text{(IV)}.$$

Das Magnetfeld bestimmt sich also aus dem „Konvektionsstrom" $\varrho\mathfrak{v}$ durch das gewöhnliche Vektorpotential. Es ist leicht einzusehen, daß die Sprungbedingung für das Magnetfeld in diesem Falle einfach so lautet:

$[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}]$ erleidet den Sprung $\eta\mathfrak{v}$, (IVa)

welcher dem flächenhaften „Konvektionsstrom" gleich ist; denn es ist $[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}]$ hinsichtlich des Sprunges mit

$$[\mathfrak{n}[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]] = \mathfrak{v}(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{n}) - \mathfrak{E}_0(\mathfrak{v}\mathfrak{n}) = \mathfrak{v}(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{n})$$

äquivalent (übrigens auch $B_n = (\mathfrak{n}, \mathfrak{B})$ mit $(\mathfrak{n}[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]) = 0$). Diese Sprungbedingung gilt offenbar auch für variables k, wie wir es in II, § 3 benötigen.

Beweis: Es ist

$$[\mathfrak{E}_0 \operatorname{rot}\mathfrak{v}] = 2k[\mathfrak{E}_0 \mathfrak{e}_z] \qquad (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad})\mathfrak{v} = -k[\mathfrak{E}_0 \mathfrak{e}_z],$$

also

$$[\mathfrak{E}_0 \operatorname{rot}\mathfrak{v}] = -2(\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad})\mathfrak{v}.$$

Ferner:

$$0 = \operatorname{grad}(\mathfrak{E}_0 \mathfrak{v}) = [\mathfrak{E}_0 \operatorname{rot}\mathfrak{v}] + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad})\mathfrak{v} + (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E}_0 = (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E}_0 - (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad})\mathfrak{v}.$$

Und endlich:

$$\operatorname{rot}[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0] = \mathfrak{v} \operatorname{div}\mathfrak{E}_0 - \mathfrak{E}_0 \operatorname{div}\mathfrak{v} + (\mathfrak{E}_0 \operatorname{grad})\mathfrak{v} - (\mathfrak{v} \operatorname{grad})\mathfrak{E}_0 = \mathfrak{v}\varrho,$$

was zu beweisen war.

II. Konkrete Beispiele zur Elektrostatik im stationären Gravitationsfelde.

§ 1. Das Rowlandsche Experiment für den mitbewegten Beobachter.

1. In diesem Falle ist

$$\mathfrak{v} = \omega[\mathfrak{e}_z \mathfrak{r}]$$

(mit den Komponenten $-\omega y, \omega x, 0$). Betrachten wir einen gleichmäßig geladenen ($\varrho = \text{const.}$ etwa dünnen) Ring, so ist auch das „Anfangsfeld" rotationssymmetrisch; nach I, § 2,2 gilt also

$$\operatorname{rot}\mathfrak{B} = \varrho\mathfrak{v} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$$
$$\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0 \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = \varrho,$$

d. h. kein Unterschied gegen den festen Beobachter. Der Ring ruht aber im Bezugssystem, und Konvektionsstrom mit seinem Magnetfeld erscheinen als Folge des „Gravitationsfeldes" im Sinne der älteren, auf dem Äquivalenzprinzip basierenden Einsteinschen Theorie.

2. Betrachten wir jetzt eine geladene Kugeloberfläche vom Radius R und Gesamtladung e. Wir haben dann das gewöhnliche Rowlandsche Problem (wie für den festen Beobachter) zu lösen[1]). Die Bedingungen lauten:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathfrak{B} = \operatorname{div}\mathfrak{B} = 0, \\ B_n \text{ stetig}, \\ [\mathfrak{n}, \mathfrak{B}] \text{ erleidet den Sprung } \dfrac{e\omega}{4\pi R^2}[\mathfrak{e}_z \mathfrak{r}] \end{cases}$$

1) In II, § 3 wird der Fall des veränderlichen k separat betrachtet.

1) Die Lösung ist ein Gegenstück zu den klassischen Problemen: der Polarisation der Kugel, der magnetischen Induktion in einer rotierenden Kugel, oder der Kirchhoffschen Behandlung der Stokesschen Regentropfenformel. Da ich die Lösung in der Literatur nicht finde und sie für unsere Hauptaufgaben fortwährend benötigt wird, sei sie hier kurz abgeleitet.

(Vektorpotential ist stetig). Unter bekannten Voraussetzungen im ∞ beweist man die Unität der Lösung mit Hilfe des Greenschen Satzes:

$$\int \mathfrak{B}^2 dV = \int \mathfrak{B}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{f}\,dV = \int \mathrm{div}\,[\mathfrak{f},\mathfrak{B}]\,dV = \int ([\mathfrak{n},\mathfrak{B}]\,\mathfrak{f})\,do.$$

Man wird sofort zu dem Ansatz geführt:

$$\text{außen } \mathfrak{B} = C_1 \,\mathrm{grad}\left(\frac{z}{r^3}\right) = C_1\left(\frac{\mathfrak{e}_z}{r^3} - \frac{3zr}{r^5}\right),$$

$$\text{innen, } \mathfrak{B} = C_2 \mathfrak{e}_z.$$

Für B_n erhält man:

$$\text{außen } -\frac{2C_1}{R^4} z, \quad \text{innen } \frac{C_2}{R} z$$

und die Stetigkeit von B_n liefert $C_2 = -\frac{2C_1}{R^3}$.

Ebenso hat man für $[\mathfrak{n},\mathfrak{B}]$:

$$\text{außen } C_1 \frac{[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z]}{R^4}, \quad \text{innen } C_2 \frac{[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z]}{R}$$

und als Sprung:

$$\left(\frac{C_1}{R^4} - \frac{C_2}{R}\right)[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z] = \frac{3C_1}{R^4}[\mathfrak{r},\mathfrak{e}_z];$$

die obige Bedingung für diesen Sprung liefert sofort:

$$C_1 = -\frac{e\omega}{12\pi} R^2 \qquad C_2 = \frac{e\omega}{6\pi R}$$

(und das Vektorpotential $\mathfrak{f} = -\frac{e\omega}{12\pi} R^2 \frac{[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z]}{r^3}$ bzw. $-\frac{e\omega}{12\pi R}[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z]$ ist stetig).

Die Lösung lautet also endgültig:

$$\begin{array}{ll} \text{außen} & \mathfrak{B} = -\frac{e\omega}{12\pi} R^2 \,\mathrm{grad}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{e\omega}{12\pi} R^2\left(\frac{3zr}{r^5} - \frac{\mathfrak{e}_z}{r^3}\right) \\ \text{innen} & \mathfrak{B} = \frac{e\omega}{6\pi R}\mathfrak{e}_z \end{array} \qquad \text{(V)}$$

Außen ist das Feld mit dem eines magnetischen Dipols identisch.

Die Gleichung der magnetischen Kraftlinien, etwa in der Meridianebene $y = z$, erhält man durch Auflösung einer linearen Differentialgleichung:

$$y^2 + z^2 = \text{const. } y^{3/2}. \qquad (2)$$

Diese Kraftlinien sind in der Fig. 1 dargestellt, die wir noch für andere Zwecke benutzen werden.

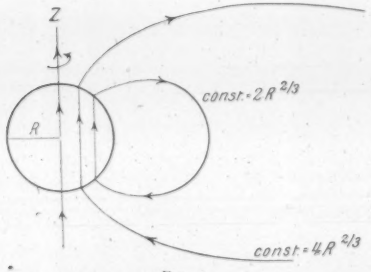


Fig. 1.

§ 2. Magnetfeld ruhender Elektrizität im Felde rotierender ferner Massen. Das modifizierte elektrische Feld.

1. Es ergibt sich sofort aus unseren Fundamentalgleichungen, daß ruhende Elektrizität im stationären Gravitationsfelde mit einem Magnetfeld umgeben ist. Wir werden zeigen, daß im Felde rotierender ferner Massen dieses Magnetfeld (unter Umständen) von genau derselben Art ist, wie wenn die geladenen Körper relativ zu jenen Massen entgegengesetzt rotieren würden; in diesem Punkt haben wir also den Anschluß an das Rowlandsche Experiment (Reziprozität!). Dagegen wird es sich herausstellen, daß das elektrische Feld bedeutende Änderungen erleidet, welche gerade groß werden, wenn die rotierende Hohlkugel zur „Weltkugel" wird; ähnlich wie Thirring abweichende Ergebnisse nicht für die Coriolis-, sondern für die Zentrifugalkraft erhält.

2. Das Feld rotierender ferner Massen ist, wie a. a. O. zitiert, von Thirring bestimmt worden. Es sei mir erlaubt, hier zu bemerken, daß in der Tabelle der kovarianten $g_{\mu\nu}$ auch nach der letzten Korrektur noch Rechnungsversehen enthalten sind, die zwar für die Thirringschen Resultate belanglos sind, für uns aber ausschlaggebend wären. Vor allem muß im Felde (33) statt -1

$$-1 - \frac{2m}{a}\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{3}\right)$$

stehen ($m = kM$ „Gravitationsradius"); außerdem heißt der Koeffizient im Felde (12) nicht $\frac{2}{3}$ sondern $\frac{1}{3}$.

Wir brauchen aber die Tabelle der kontravarianten $g^{\mu\nu}$. Diese sei hier angeführt. Es ist

$$\sqrt{g} = 1 + \frac{2m}{a}\left(1 - \frac{a^2\omega^2}{3}\right)$$

und

$$\left|\begin{array}{cccc}
-1+\frac{2m}{a}\left[1+\frac{a^2\omega^2}{3}-\frac{2\omega^2}{15}(z^2+x^2-2y^2)\right], & -\frac{4m}{5a}\omega^2 xy, & 0, & -\frac{4m}{3a}\omega y,\\
-\frac{4m}{5a}\omega^2 xy, & -1+\frac{2m}{a}\left[1+\frac{a^2\omega^2}{3}-\frac{2\omega^2}{15}(z^2+y^2-2x^2)\right], & 0, & \frac{4m}{3a}\omega x,\\
0, & 0, & -1+\frac{2m}{a}\left(1-\frac{a^2\omega^2}{3}\right), & 0,\\
-\frac{4m}{3a}\omega y, & \frac{4m}{3a}\omega x, & 0, & 1+\frac{2m}{a}\left[1+a^2\omega^2-\frac{2\omega^2}{15}(2z^2-x^2-y^2)\right].
\end{array}\right| \qquad (3)$$

Aus Rücksichten der bequemeren Anordnung sind hier vier Zeilen in acht gebrochen worden.

(Es werden dabei reelle Variablen verwendet, dagegen die Indizes wie bei Thirring in der Reihenfolge 1, 2, 3, 0 geschrieben.)

3. In unserem Falle ist also:

$$\mathfrak{v} = -\frac{4m}{3a}\omega\,[e_z r].$$

Betrachten wir einen mit $\varrho = \text{const.}$ geladenen (etwa dünnen) Ring (in der Nähe des Mittelpunktes der Hohlkugel mit ihr konzentrisch), so sind die Voraussetzungen I, §. 2,2 erfüllt und es gilt einfach:

$$\text{rot}\,\mathfrak{B} = \varrho\mathfrak{v} \qquad \text{div}\,\mathfrak{B} = 0;$$

der ruhende Ring ist also mit einem Magnetfeld umgeben, welches sich aus dem „Konvektionsstrom" $\varrho\mathfrak{v}$ so bestimmt, als ob der Ring mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, also entgegengesetzt, rotieren würde.

Der Strom ist dem Betrage nach:

$$\boxed{\varrho\frac{4m}{3a}\omega\bar{r}} \qquad \bar{r} = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad \text{(VI)}$$

Wird die Hohlkugel zur „Weltkugel", setzt man also $\frac{4m}{3a} \sim 1$, so erhält man den richtigen Wert $\varrho\bar{r}\omega$ für den Konvektionsstrom. Auch die Corioliskraft bei Thirring erhält dann den richtigen Wert; dagegen Zentrifugalkraft nur $^1/_5$ des richtigen Wertes und die Axialkomponente wird groß. Aber auch die Voraussetzung des schwachen Feldes $\frac{m}{a} \sim 0$ ist dann nicht mehr erfüllt. Zu bemerken wäre noch, daß für das Magnetfeld, wie für die Corioliskraft, nur $-g^{oi}$ in Betracht kommen; die Glieder, die auf die Zentrifugalkraft führen, kommen nur für das elektrische Feld in Frage, werden allerdings dort maßgebend.

4. Betrachten wir jetzt in der Mittelpunktsnähe der Hohlkugel und mit ihr konzentrisch eine geladene Kugeloberfläche. Nach der allgemeinen Sprungbedingung I, § 2,2 erscheint auf der Kugel ein flächenhafter „Konvektionsstrom" $-\eta\cdot\frac{4m}{3a}\omega\cdot[e_z r]$. Die Kugel ist also mit einem Magnetfeld umgeben, wie es die Fig. 1 zeigt. Es ist aber statt der Winkelgeschwindigkeit der Wert $\frac{4m}{3a}\omega$ zu nehmen und der Sinn der Kraftlinien ist umgekehrt, als ob die fernen Massen ruhten und die Kugel entgegengesetzt rotierte.

5. Im Rowlandschen Experiment ist das elektrische Feld einfach das Anfangsfeld. Es zeigt sich, daß hier keine Umkehrbarkeit besteht; das elektrische Feld ist abgeändert und diese Abweichung vom gewöhnlichen elektrostatischen Feld wird (wie die Axialkomponente der Zentrifugalkraft bei Thirring) gerade groß und meßbar, wenn die Hohlkugel zur Weltkugel wird. Es kommen hier alle g^{ii} in Anwendung, nicht nur, wie bei der Zentrifugalkraft, g^{00}. Beginnen wir mit den Ausdrücken für Φ^i. Es ist:

$$\left\{\begin{array}{l}
\Phi^1 = -\frac{m}{a}\left(1+\frac{a^2\omega^2}{3}\right)+\frac{2}{15}\frac{m}{a}\omega^2(z^2+y^2-2x^2),\\
\Phi^2 = -\frac{m}{a}\left(1+\frac{a^2\omega^2}{3}\right)+\frac{2}{15}\frac{m}{a}\omega^2(z^2+x^2-2y^2),\\
\Phi^3 = -\frac{m}{a}(1+a^2\omega^2)-\frac{2}{15}\frac{m}{a}\omega^2(x^2+y^2-2z^2).
\end{array}\right.$$

Wir wollen nur in 1. Annäherung rechnen. Da in den Thirringschen Untersuchungen die ersten konstanten Glieder keine Rolle spielen, muß man in 1. Annäherung bis zu den quadratischen Gliedern entwickeln. Bei uns sind aber gerade diese konstanten Glieder in 1. Annäherung weitaus überwiegend; ebenso fällt $\mathfrak{E}_0$ ganz weg. Diesen Verlauf des Feldes in der unmittelbaren Nähe der geladenen Kugeloberfläche müssen wir natürlich fortgesetzt denken, damit wir die üblichen Grenzbedingungen im Unendlichen anwenden können. Nach I, § 2, lauten Differentialgleichungen und Grenzbedingungen unseres Problems (der Bestimmung des elektrischen Feldes einer geladenen Kugeloberfläche im Felde ferner rotierender Massen) folgendermaßen. Wir führen die Abkürzungen ein:

$$k = \frac{m}{a}\,\frac{2}{3}a^2\omega^2, \qquad c = \frac{e}{4\pi}\cdot 2k. \tag{4}$$

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{außen} & \operatorname{div}\mathfrak{E} = -c\operatorname{div}\left(\dfrac{z\mathfrak{e}_z}{r^3}\right),\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0, \\ \text{innen} & \operatorname{div}\mathfrak{E} = \operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0. \end{array}\right\} \tag{5}$$

$\mathfrak{E}$ hat keinen Tangentialsprung (also $\varphi = \text{const.}$ auf der Kugel) und den Normalsprung gleich dem von $\mathfrak{E}_0 + 2\mathfrak{E}_{40}$:

$$\eta = \frac{e}{4\pi R^2}\left[1 - \frac{2m}{a} - k\left(1 + \frac{2z^2}{R^2}\right)\right]. \tag{5a}$$

Um die Gleichungen zu lösen, setzen wir:

$$\mathfrak{E} = -c\left(\frac{z\mathfrak{e}_z}{r^3} + \operatorname{rot}\mathfrak{f}\right), \tag{6}$$

wo das Vektorpotential $\mathfrak{f}$ durch $\operatorname{div}\mathfrak{f} = 0$ normiert sein soll. Die Gleichung $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = 0$ liefert dann:

$$\Delta\mathfrak{f} = \operatorname{rot}\left(\frac{z\mathfrak{e}_z}{r^3}\right).$$

Nun ist aber:

$$\Delta\left(\frac{z}{2r^3}[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z]\right) = -\frac{3z}{r^5}[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z] = \operatorname{rot}\left(\frac{z\mathfrak{e}_z}{r^3}\right),$$

also:

$$\mathfrak{f} = \frac{z}{2r^3}[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z] + \mathfrak{a} \qquad \text{mit } \Delta\mathfrak{a} = 0.$$

Zur Befriedigung der Grenzbedingungen müssen wir (schon um Homogenität und Größenordnung in der Nähe der geladenen Kugel zu wahren):

$$\mathfrak{a} = -R^2\frac{z}{2r^5}[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z],$$

also:

$$\mathfrak{f} = \left(\frac{z}{2r^3} - R^2\frac{z}{2r^5}\right)[\mathfrak{r}\mathfrak{e}_z] \quad (\text{mit } \operatorname{div}\mathfrak{f} = 0)$$

nehmen. Zu unserer Lösung können wir natürlich noch eine beliebige Lösung der Gleichungen $\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0$ addieren, und zwar zu demselben Zweck:

$$\frac{e\mathfrak{r}}{4\pi r^3}\left[1 - \frac{2m}{a} - k\right].$$

Alles in (6) eingesetzt, ergibt nun:

$$\boxed{\mathfrak{E} = \frac{e\mathfrak{r}}{4\pi r^3}\left\{1 - \frac{2m}{a} - k - k\left(1 - \frac{3z^2}{r^2}\right) + k\frac{R^2}{r^2}\left(1 - \frac{5z^2}{r^2}\right)\right\} - \frac{e\mathfrak{z}}{4\pi r^3}\cdot\mathfrak{e}_z\cdot 2k\left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right)} \tag{VII}$$

Die Tangentialkomponente ist an der Kugel ($r = R$) wirklich $= 0$ und die Normalkomponente hat den durch (5a) vorgeschriebenen Sprung; innen ist das Feld $= 0$. Das elektrische Potential ist gegeben durch:

$$\boxed{\varphi = \frac{e}{4\pi r}\left\{1 - \frac{2m}{a} - k - k\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) + k\frac{R^2}{r^2}\left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{r^2}\right)\right\} + \frac{e}{4\pi R}\cdot\frac{2}{3}k}, \tag{VIIa}$$

φ ist auf der Kugel $\text{const.} = \dfrac{e}{4\pi R}\left\{1 - \dfrac{2m}{a} - k\right\}$.

6. Die Verteilung der Ladung ist durch (5a) gegeben. Man sieht, daß die Ladung von den Polen nach dem Äquator verschoben ist, so etwa wie die Materie durch Zentrifugalkräfte abplattet. Dies betrifft aber nur die „scheinbare Polarisationsladung" im Sinne meiner früheren Arbeiten (siehe auch § 3), wie überhaupt der ganze Vorgang durch einen Dielektrizitätstensor in einem anisotropen Medium sich beschreiben läßt. Die „scheinbare" Gesamtladung ist:

$$e\left(1 - \frac{2m}{a} - \frac{5}{3}k\right).$$

Entsprechend der Verschiebung der Ladung zeigen die elektrischen Kraftlinien nicht mehr den radialen Verlauf, sondern sind gegen den Äquator geneigt. Um diese Neigung festzustellen, untersuchen wir den Verlauf der Kraftlinien in einiger Entfernung von der geladenen Kugel ($r >> R$), so daß man die Glieder mit $\left(\dfrac{R}{r}\right)^2$ fortlassen kann. Die Lösung einer homogenen Differentialgleichung führt zur folgenden Gleichung der elektrischen Kraftlinien in der Meridianebene $y - z$ für positive y, z (sonst symmetrisch):

$$\boxed{\frac{z}{y} = \text{const}\left|\frac{z^2}{y\,(z^2+y^2)^{1/2}}\right|^k}, \qquad \text{(VIIb)}$$

wo im Exponenten $\dfrac{k}{1-\dfrac{2m}{a}} \sim k$ gesetzt ist. Für $k = 0$ hat man Geraden. Ferner sind y- und z-Achse für jedes k Kraftlinien. Man ersieht leicht die Abschätzung:

$$\frac{z}{y} < \frac{\text{const.}}{(yz)^k},$$

woraus:

$$y \to \infty \lim\left(\frac{z}{y}\right) = 0.$$

Die Neigung der Kraftlinien muß meßbar werden, wenn die Hohlkugel zur Weltkugel wird (wie die Axialkomponente der Zentrifugalkraft). Nichts Derartiges findet statt, wenn die Hohlkugel ruht und die geladene Kugel in ihrem statischen Feld rotiert; denn dann haben wir im wesentlichen die Lösung des Rowlandschen Experimentes.

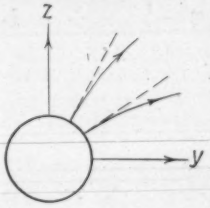


Fig. 2.

§ 3. Magnetfeld ruhender Ladungen im Gravitationsfelde rotierender Kugel. Das modifizierte elektrische Feld.

1. In diesem Falle hat man, wie Thirring a.a.O. bestimmte, wenn man $k = \frac{4}{3} m l^2 \omega$ setzt:

$$g^{\mu\nu} = \begin{vmatrix} -\left(1-\dfrac{2m}{r}\right), & 0, & 0, & -k\dfrac{y}{r^3}, \\ 0, & -\left(1-\dfrac{2m}{r}\right), & 0, & k\dfrac{x}{r^3}, \\ 0, & 0, & -\left(1-\dfrac{2m}{r}\right), & 0, \\ -k\dfrac{y}{r^3}, & k\dfrac{x}{r^3}, & 0, & 1+\dfrac{2m}{r}. \end{vmatrix}$$

2. Wir haben also:

$$\mathfrak{v} = -\frac{k}{r^3}[\mathfrak{e}_z \mathfrak{r}] = -k\,\text{rot}\left(\frac{\mathfrak{e}_z}{r}\right)$$

und da der Faktor $\dfrac{k}{r^3}$ nicht konstant ist, gelten die Voraussetzungen I, § 2, 2 nicht mehr. Da jedoch $\text{div}\,\mathfrak{v} = 0$ ist, können wir wie dort schreiben:

$$\text{rot}\,\mathfrak{B} = \text{rot}\,[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0] = \varrho\mathfrak{v} + [\mathfrak{E}_0\,\text{rot}\,\mathfrak{v}] + 2\,(\mathfrak{E}_0\,\text{grad})\,\mathfrak{v}. \qquad (7)$$

Da ferner die Formeln nur fern von der rotierenden Kugel gelten, so erkennt man, daß die beiden letzten Glieder von höherer Ordnung sind, so daß etwa bei einem ruhenden mit $\varrho = \text{const.}$ geladenen Ring wieder $\varrho\mathfrak{v}$ als „Konvektionsstrom" derart erscheint, als ob der Ring um die Massenkugel entgegengesetzt rotierte; der Betrag dieses Stromes hängt aber nicht nur von $\bar{r}$, sondern von r ab.

3. Exakt läßt sich das Problem für eine geladene Kugeloberfläche lösen, innerhalb welcher und mit ihr konzentrisch eine im Vergleich mit der geladenen Kugel kleine Massenkugel mit ungeheurer Geschwindigkeit rotiert. Dann ist die geladene Kugel mit einem Magnetfeld umgeben, welches, wie wir sehen werden, ganz merkwürdige Eigenschaften hat. Nun kommen die beiden Zusatzglieder in (7) zur Geltung. Es ist:

$$[\mathfrak{E}_0\,\text{rot}\,\mathfrak{v}] = -\frac{ek}{16\pi}\,\text{rot}\left(\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4}\right),$$

$$2\,(\mathfrak{E}_0\,\text{grad})\,\mathfrak{v} = \frac{ek}{4\pi}\,\text{rot}\left(\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4}\right)^{1}).$$

Die Differentialgleichungen und Grenzbedingungen des Problems lauten somit nach I, § 2, 1 wie folgt:

$$\left.\begin{array}{l} \text{außen}\quad \text{rot}\,\mathfrak{B} = \dfrac{3}{16}\dfrac{ek}{\pi}\,\text{rot}\left(\dfrac{\mathfrak{e}_z}{r^4}\right),\ \text{div}\,\mathfrak{B} = 0, \\ \text{innen}\quad \text{rot}\,\mathfrak{B} = \text{div}\,\mathfrak{B} = 0. \end{array}\right\} \qquad (8)$$

$$\left.\begin{array}{l} B_n \text{ ist stetig,} \\ \text{Sprung von } [\mathfrak{n}, \mathfrak{B}] = \\ \quad = \text{Sprung von } [\mathfrak{n}[\mathfrak{v}, \mathfrak{E}_0]] = \eta\mathfrak{v}. \end{array}\right\} \qquad (8a)$$

1) Statt dessen kann man sofort:

$$[\mathfrak{v}\mathfrak{E}_0] = \frac{ek}{4\pi}\left(-\frac{3\mathfrak{r}}{r^6} + \frac{\mathfrak{e}_z}{r^4}\right)$$

ausrechnen, und dann unter Benutzung von:

$$-\tfrac{1}{4}\,\text{grad}\,\frac{z}{4r^4} = -\frac{1}{4}\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4} + \frac{3\mathfrak{r}}{r^6}$$

sogleich zum Schlußresultat — der Differentialgleichung — kommen.

Als Oberflächenstrom erscheint also doch der in 2. erwähnte „Konvektionsstrom". Um die Gleichungen zu lösen, setzen wir:

$$\mathfrak{B} = \frac{3}{16}\frac{ek}{\pi}\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4} + \operatorname{grad}\varphi, \qquad (9)$$

wo φ ein Potential ist. Die Gleichung $\operatorname{div}\mathfrak{B} = 0$ führt zu der Poissonschen Gleichung:

$$\Delta\varphi = \frac{3}{4}\frac{ek}{\pi}\frac{z}{r^6},$$

und da:

$$\Delta\left(\frac{z}{r^4}\right) = \frac{4z}{r^6}$$

ist, so haben wir:

$$\varphi = \frac{3}{16}\frac{ek}{\pi}\left(\frac{z}{r^4} + \text{Potentialfunktion}\right).$$

Um die Grenzbedingungen zu befriedigen, nimmt man für diese (durch Rücksichten der Homogenität und Größenordnung geführt):

$$C\frac{z}{Rr^3}.$$

Nun ergibt sich außen für B_n der Wert:

$$-\frac{3}{8}\frac{ek}{\pi R^5}z(1+C);$$

also muß auch innen das Feld bestehen, und zwar:

$$\mathfrak{B} = -\frac{3}{8}\frac{ek}{\pi R^4}(1+C)\mathfrak{e}_z. \qquad (10)$$

Dann erleidet $[\mathfrak{n}, \mathfrak{B}]$ den Sprung:

$$-\frac{3}{16}\frac{ek}{\pi R^5}(4+3C)[\mathfrak{e}_z, \mathfrak{r}],$$

und da dieser nach (8a) $= -\frac{e}{4\pi R^2}\cdot\frac{k}{R^3}[\mathfrak{e}_z, \mathfrak{r}]$ sein muß:

$$C = -\tfrac{8}{9}.$$

Alles in (9) und (10) eingesetzt, erhalten wir folgende Lösung:

$$\text{außen}\quad \mathfrak{B} = \frac{3ek}{16\pi}\left|\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4} + \operatorname{grad}\left(\frac{z}{r^4} - \frac{8}{9R}\cdot\frac{z}{r^3}\right)\right|$$

$$\text{innen}\quad \mathfrak{B} = -\frac{ek}{24\pi R^4}\cdot\mathfrak{e}_z \qquad \text{(VIII)}$$

4. Dieses Magnetfeld erscheint als Superpositionsfeld von zwei Feldern:

$$\mathfrak{B}_1 = \left\{\begin{array}{l} \frac{3}{16}\frac{ek}{\pi}\left|\frac{\mathfrak{e}_z}{r^4} + \operatorname{grad}\frac{z}{r^4}\right|, \\ \text{bzw.}\ -\frac{3}{8}\frac{ek}{\pi R^4}\mathfrak{e}_z \end{array}\right.$$

und

$$\mathfrak{B}_2 = \left\{\begin{array}{l} -2\cdot\frac{e}{12\pi}\left(\frac{k}{R^3}\right)R^2\operatorname{grad}\frac{z}{r^3}, \\ \text{bzw.}\ 2\frac{e}{6\pi R}\left(\frac{k}{R^3}\right)\mathfrak{e}_z. \end{array}\right.$$

Das Feld $\mathfrak{B}_1$ hat kreisförmige Kraftlinien (wie man es durch Lösung einer linearen Differentialgleichung erkennt) und zwar ist der Sinn der magnetischen Kraftlinien wirklich so, als ob die geladene Kugel um die Massenkugel entgegengesetzt rotieren würde (Fig. 3). Dieses Feld genügt bereits fast

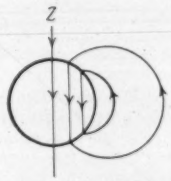


Fig. 3.

allen Bedingungen, liefert aber dreifachen Wert des Flächenstromes. Danach ist es klar, daß man, um den richtigen Wert des Stromes zu erhalten, ein Rowlandsches Feld addieren muß, welches den doppelten Strom liefert, und zwar so, als ob die geladene Kugel gleichsinnig mit der Massenkugel rotieren würde. Der Vergleich mit (V) zeigt sofort, daß das das Feld $\mathfrak{B}_2$ ist.

Weit von der geladenen Kugel ist nur dieses Rowlandsche Feld maßgebend; das Magnetfeld entspricht also merkwürdigerweise dem Felde der gleichsinnig mit der Massenkugel rotierender geladenen Kugel. In der Nähe der geladenen Kugel überlagert sich aber jenes Feld mit kreisförmigen Kraftlinien und wird überwiegend, so daß das Feld wirklich so ist, als ob die geladene Kugel um die Massenkugel entgegengesetzt rotieren würde. Es ergibt sich also das merkwürdige Resultat, daß das Magnetfeld auf einer gewissen Fläche $\equiv 0$ sein und dann umkehren muß; der Strom reicht also nicht aus, um das Feld gleichsinnig zu erhalten. Nichts Ähnliches findet statt, wenn die geladene Kugel im statischen Feld der Massenkugel rotiert; denn dann haben wir im wesentlichen die Rowlandsche Lösung. Daß aber beide Fälle etwas Grundverschiedenes darstellen, ist aus folgendem Grunde klar. Das Feld der rotierenden Kugel ist derart, daß es im Unendlichen gegen das Galileische konvergiert; in diesem mächtigen Untergrund ruht bei uns die geladene Kugel, bei Rowland dagegen rotiert sie in ihm. Die

Umkehrfläche des Magnetfeldes ist ein Rotationsoval 6. Ordnung, dessen Hauptmeridian ein zirkulares Oval ist:

$$(y^2+z^2)\left|1+\left(\frac{4}{9R}\right)^2(y^2+4z^2)\right|^2 = \left(\frac{8}{9R}\right)^2(y^2+2z^2)^2.$$

Wie die Fig. 4 zeigt, findet die Umkehr bereits in ziemlicher Nähe der geladenen Kugel statt.

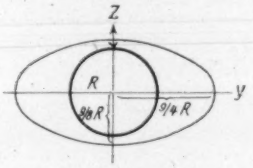


Fig. 4.

5. Das elektrische Feld erfährt in diesem Falle Modifikation nur durch das statische kugelsymmetrische Feld. Wie in meinen früheren Arbeiten auseinandergesetzt ist, läßt sich hier die Sachlage unter dem Gesichtspunkt der „inhomogenen Polarisation" und der „scheinbaren Ladung" verstehen. Die veränderliche „Dielektrizitätskonstante" ist dabei:

$$\boxed{\varepsilon = 1-2\Phi}, \qquad (IX)$$

wo Φ das Newtonsche Potential $-\frac{m}{r}$ ist.

Die Gleichungen des elektrischen Feldes lauten:

$$\text{rot}\,\mathfrak{E}=0, \quad \text{div}\,\mathfrak{E}=\varrho\left(1-\frac{2m}{r}\right)+\frac{2m}{r^2}\cdot E_0^r. \qquad (11)$$

Bei flächenhafter Verteilung der Ladung hat man noch zu verlangen, daß die Tangentialkomponente von $\mathfrak{E}$ stetig und die Normalkomponente den Sprung von $\mathfrak{E}_0\left(1-\frac{2m}{r}\right)$ erleidet.

Das erste Glied von (11) ist

$$\varrho(1+2\Phi)\backsim\frac{\varrho}{\varepsilon}=\text{„scheinbare Ladung"}.$$

Die Bedeutung des 2. Gliedes kommt bei flächenhafter Verteilung zum Vorschein. Betrachten wir speziell eine geladene Kugeloberfläche, so lauten die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\text{rot}\,\mathfrak{E}=0, \quad \text{div}\,\mathfrak{E}=\frac{me}{2\pi}\cdot\frac{1}{r^4},\\ &\text{Sprung von } E_n=\eta\left(1-\frac{2m}{R}\right)\cdot\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

Als Lösung findet man sogleich:

$$\boxed{\mathfrak{E}=\frac{er}{4\pi r^3}\left(1-\frac{2m}{r}\right)}=\frac{er}{4\pi r^3}(1+2\Phi). \qquad (X)$$

Das elektrische Potential ist:

$$\left.\begin{aligned}&\boxed{\varphi=\frac{e}{4\pi r}\left(1-\frac{m}{r}\right)}=\\ &=\frac{e}{4\pi r}(1+\Phi)=\varphi_0(1+\Phi).\end{aligned}\right| \qquad (Xa)$$

Das Potential ist auf der Kugel const. und innen ist das Feld = 0. Es ist schließlich:

$$\mathfrak{E}\backsim\frac{\left(\frac{e}{\varepsilon}\right)r}{4\pi r^3},$$

wo $\frac{e}{\varepsilon}$ die „scheinbare Ladung ist"; diese Tatsache ist analog der Wirkung der Ladung im Medium mit veränderlicher „Dielektrizitätskonstanten": die Ladung kommt immer mehr zur Geltung, wegen $\varepsilon\to 1$.

Zusammenfassung.

Die allgemeinen Gleichungen der Elektrodynamik im schwachen Gravitationsfelde, die im Falle der räumlichen Isotropie des metrischen Feldes früher vom Verf. abgeleitet und auf die Form der Maxwellschen Gleichungen in einem inhomogenen Medium gebracht worden sind, werden im I. Teil dieser Arbeit diskutiert. Im Falle der „speziellen Gravitationsfelder" führen sie zu den bereits von H. A. Lorentz aufgestellten Gleichungen für den mitbewegten Beobachter (deren Ableitung aber nur auf die Translation des Bezugssystems zugeschnitten war) und lassen sich auch mit den Gleichungen der spez. Relativitätstheorie in Einklang bringen. Ferner werden die Gleichungen der Elektrostatik im stationären Gravitationsfeld in aller Allgemeinheit, d. h. auch für das räumlich anisotrope metrische Feld, aufgestellt und die Fälle aufgesucht, in welchen das Magnetfeld der ruhenden Ladungen direkt aus dem gravitationellen „Konvektionsstrom" sich bestimmt, was für die Hauptaufgabe der Arbeit benötigt wird.

Im II. Teil werden dann die allgemeinen Gleichungen auf konkrete Beispiele der Elektrostatik im stationären Gravitationsfelde angewendet. Als Einführung dient die Bestimmung des Magnetfeldes einer rotierenden geladenen Kugeloberfläche (das Rowlandsche Experiment), die sich nach unseren Gleichungen für den mitbewegten Beobachter wie für den ruhenden gestaltet.

Den Hauptteil dieser Arbeit bilden sodann Beispiele, die zum Ziele haben, die bekannten Untersuchungen von Thirring über die Mechanik hinaus auf die Elektrodynamik auszudehnen und im Zusammenhang damit auch das Problem der Relativität der Bewegung zu berühren. Es zeigt sich nun, daß im metrischen Felde rotierender ferner Massen zwar das Magnetfeld eines ruhenden geladenen Ringes oder einer ruhenden geladenen Kugeloberfläche von genau derselben Art ist, als ob diese geladene Kugel entgegengesetzt im statischen Feld rotieren würde (Relativität der Bewegung!). Aber das elektrische Feld z. B. der geladenen Kugel ist bedeutend modifiziert (und das entspricht den Resultaten Thirrings über die Achsialkomponente der Zentrifugalkraft); diese Modifikationen sind: Verschiebung der „Polarisationsladung" gegen den Äquator und entsprechend Neigung der Kraftlinien gegen diesen. Diese Erscheinungen müssen gerade meßbar werden, wenn die Hohlkugel zur „Weltkugel" wird (wie jene Achsialkomponente). Es ist dabei zu bemerken, daß man hier in formaler Hinsicht mit dem dielektrisch anisotropen Medium zu tun hat.

Das zweite Problem ist die Bestimmung des Magnetfeldes einer ruhenden geladenen Kugel im metrischen Felde der mit ihr konzentrisch rotierenden Massenkugel. Das Problem läßt sich (wie das erste) exakt lösen, wobei man die merkwürdige Erscheinung der Umkehr des Magnetfeldes erhält. Das durch das statische Feld modifizierte elektrische Feld wird unter dem Gesichtspunkt der „scheinbaren Ladung" und der „inhomogenen Polarisation" erörtert.

(Eingegangen 12. Mai 1925.)

Über das Drosselkreuz im Hochvakuum.

Von C. Benedicks und G. Phragmén.

1. Einleitung.

In einer in dieser Zeitschrift veröffentlichten Arbeit von E. Rumpf[1]) wurde geschlossen, daß die Wirkung eines thermoelektrischen Drosselkreuzes im Vakuum größtenteils verschwinden sollte. Nun ist von C. Benedicks[2]) das Drosselkreuz — die einfache Anordnung, welche von einer großen Reihe früherer Forscher benutzt wurde[1]) — zwar wegen naheliegender Fehlerquellen keineswegs in den Vordergrund gestellt, wenn es sich um den Existenzbeweis der Thermoströme im homogenen Kreise handelte; der erwähnte negative Befund erschien nichtsdestoweniger sehr bemerkenswert. Zwar hat E. Rumpf[2]) später die fragliche Schlußfolgerung fallen lassen, indem das Ausbleiben des Effektes auf einer mangelnden Wärmeübertragung im Vakuum zurückgeführt wurde. Es erschien jedoch von Interesse einen inzwischen geplanten Versuch auszuführen, wo die Wärmeübertragung zum Drosselkreuz in zuverlässiger Weise durch hochfrequente Ströme zu erreichen war.

2. Versuchsanordnung.

Als Material wurde (reinster Acheson-)Graphit gewählt, und zwar aus dem Grunde, weil dieser Stoff beträchtlich weniger als die Metalle abhängig sein dürfte von einer Kaltbearbeitung der Oberfläche — die als nächstliegende Fehlerquelle gelten kann. Zwar ist ja eine gewisse Plastizität vorhanden (verhältnismäßig leichte Parallelorientierung der Graphitblätter!), dieselbe ist aber so gering, daß schon ein ganz geringer Druck mit einer Nadelspitze Splitter hervorruft; die bei der Bearbeitung von Graphit reichlich entstehende Staubwolke weist auch auf eine erhebliche Sprödigkeit hin. Wenn beim Zusammenbringen zweier Graphitstäbe eine Deformation der Oberflächenschicht vorkommt, muß sie demnach außerordentlich geringfügig sein. Daß eine bei der Bearbeitung von Graphit vermutete, röntgenographisch feststellbare Veränderung auch nach kräftiger Bearbeitung nicht vorhanden ist, wurde neuerdings von F. Rinne dargelegt[3]).

Ein Vorzug des Graphits ist ja auch die Unmöglichkeit einer leitenden Oxydschicht — wie sie bei oxydablen Metallen vorkommt.

Der Graphit wurde in der Form 20 cm langer, 4,0 dicker Rundstäbe benutzt, die am Ende (30 mm) auf einem Durchmesser von 2,3 mm eingeengt waren.

Zwei solche Stäbe A, A' (Fig. 1) bildeten ein Drosselkreuz im Zentrum eines kugeligen Glasballons B, der mit 5 Rohrstutzen versehen war. In den zwei längeren Stutzen C, C' waren die Graphitstäbe bei D, D' wassergekühlt eingekittet. Die Stäbe wurden geheizt durch die

1) E. Rumpf, Das Verschwinden des Benedicks-Effektes im Vakuum. Phys. Zeitschr. **24**, 437, 1923.

2) C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4) **55**, 1, 103, 1918.

1) Vgl. C. Benedicks, Kritische Studien der Literatur betreffend Thermospannungen im einmetallischen Kreise. Arkiv f. Matematik, Astronomi och Fysik, Stockholm, **14**, Nr. 20, 1—61, 1919.

2) E. Rumpf, Der Benedicks-Effekt im Vakuum. Phys. Zeitschr. **25**, 400, 1924.

3) F. Rinne, Zentralbl. f. Min. 1924, 513.

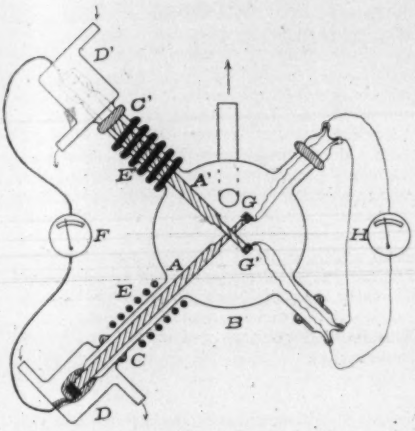


Fig. 1.

Spule E oder E', welche von hochfrequentem Wechselstrom durchflossen waren.

Die Spannung des Drosselkreuzes wurde an dem Millivoltmeter F abgelesen. Behufs Temperaturorientierung waren die freien Enden des Kreuzes mit glimmerisolierten, gut angepaßten Kupferschuhen G, G' umgeben, an welche zwei Konstantan-Kupfer-Thermoelemente angelötet waren; ein zweites Millivoltmeter H ergibt die Temperaturdifferenz der Enden. Von dem Wechselstrom waren die Thermoelemente unbeeinflußt.

Evakuiert wurde mit einem Aggregat von Quecksilberdampfstrahlpumpen. Zur Druckbestimmung diente ein Manometer nach Mc Leod, das 10^{-5} mm noch abzuschätzen gestattete. Das erhaltene Vakuum war schließlich ein vorzügliches, indem in der Mc Leod-Kapillare überhaupt keine Luft zu beobachten war.

Der gemessene Druck ist demnach auf weniger als 10^{-5} mm zu schätzen; allerdings konnte der Druck im Behälter B ein wenig höher sein.

3. Resultat.

A. Aus der Fig. 2, welche das bei $p < 10^{-5}$ mm Hg erhaltene Hauptresultat darstellt, ist folgendes ersichtlich.

1. Eine Thermospannung E des Drosselkreuzes ist offenbar vorhanden.

Dieselbe erscheint allerdings von der vorangehenden Erhitzung stark abhängig. Diese beruht aber nur darauf, daß wegen der Art der Wärmezuführung der bei der Drosselstelle liegende Teil des Graphitstabes schneller erhitzt wird, als das Ende, wo die Schuhe des Thermoelementes angebracht sind; die beobachtete Temperaturdifferenz $\triangle T$ ist also hier zu klein. Während des Abkühlens bleibt umgekehrt die Temperatur des Endes etwas höher. Die richtige Temperaturdifferenz muß demnach auf einer zwischenliegenden Kurve (wie der gestrichelten) liegen, welche jedoch den während der Abkühlung beobachteten Punkten näher liegen muß.

2. Wenn auch die Lage der gestrichelten Kurve nicht genau feststellbar ist, stellt sie doch offenbar annähernd eine Kurve 3. Grades dar. Der Umstand, daß bei einer Erhitzung schließlich auch der Kontakt Graphit—Kupfer bei D, bzw. D' wärmer wird — was einen zu E entgegengerichteten Ausschlag ergibt —, wird die Krümmung der beobachteten Kurve nur verringern können.

Diese Feststellung ist wichtig, indem die Annahme, daß E durch eine heterogene (kaltbearbeitete, oder etwa gashaltige) Oberflächenschicht vorgetäuscht sei (wie von E. Rumpf anfangs angenommen), eine lineare Beziehung zwischen E und $\triangle T$ erfordert, während die im homogenen Kreis — wie von C. Benedicks[1]) besonders für Hg dargelegt wurde — zu beobachtende E eine Funktion 3. Grades sein muß.

Daraus geht hervor, daß wenn eine Heterogenität der Oberfläche mitspielt, dies doch in außerordentlich geringem Maße der Fall ist; wesentlich muß es sich um eine Thermospannung 1. Art handeln.

3. Für genau denselben Acheson-Graphit (bei nahezu denselben Dimensionen und Druckverhältnissen der Stäbe) erhielt C. Benedicks[2]) bei Atmosphärendruck $E = 1{,}2 \cdot 10^{-4}$ Volt bei $\triangle T = 18^0$. Diese Beobachtung ist in Fig. 2 als schräges Kreuzchen eingetragen; sie stimmt gut

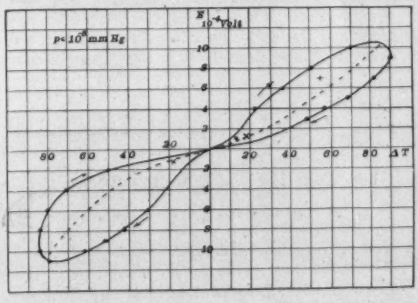


Fig. 2.

1) C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4), **62**, 185, 1920.
2) C. Benedicks, Ann. d. Phys. (4), **55**, 72, 1918.

zu der (unabhängig gezogenen) gestrichelten Kurve — welche für $\triangle T = 18^0$ $E = 1{,}0 \cdot 10^{-4}$ Volt ergibt. Da keine Vorsichtsmaßnahmen getroffen wurden, um genau denselben Druck an der Drosselstelle zu erhalten, ist jedoch dieser guten Übereinstimmung kein größeres Gewicht beizulegen; doch ist zu bemerken, daß bei Graphit E gegen eine Veränderung des Anlegedrucks verhältnismäßig wenig empfindlich ist.

Die im Hochvakuum erhaltene Thermospannung stimmt jedenfalls mit der seinerzeit bei Atmosphärendruck beobachteten der Größenordnung nach vollständig überein.

B. Nach dem Zulassen des Vorvakuums wurden Messungen bei $p = 4{,}5$ mm Hg angestellt, bei sonst unveränderten Bedingungen. Dieselbe Energiezufuhr wie früher ergab nunmehr, wegen des erhöhten Wärmeverlustes, nur einen Höchstwert der Temperaturdifferenz von 55^0 (im Vakuum 90^0). Der entsprechende Wert von E war 7.10^{-4} Volt. Wie aus Fig. 2 ersichtlich, ist dieser Wert (als + eingetragen) ein wenig höher, als es der gestrichelten Kurve entspricht (etwa 5.10^{-4}). Bei vergrößertem Wärmeverlust muß der einer gegebenen $\triangle T$ entsprechende E-Wert offenbar höher werden, da ja die $\triangle T$ der freien Enden von der Wärmeabfuhr stärker beeinflußt werden als die wirkliche $\triangle T$ an der Drosselstelle.

C. Es wurde schließlich eine Beobachtungsreihe bei $p = 750$ mm vorgenommen, unter sonst unveränderten Umständen. Die dadurch weiter gesteigerte Wärmeabfuhr äußerte sich darin, daß nunmehr nur eine Höchsttemperatur $\triangle T = 45^0$ zu erreichen war. Beobachtet wurde dabei $E = 18.10^{-4}$ Volt, also eine nicht unwesentliche Steigerung. Dieselbe steht aber mit dem erhöhten Wärmeverlust in Übereinstimmung: da die Wärme etwa der Stabmitte zugeführt wird, muß durch eine gesteigerte Konvektion usw. nicht nur das freie, verjüngte Ende (bei G), sondern auch das Ende D eine niedrigere Temperatur annehmen; dadurch eine verminderte von Graphit—Kupfer herrührende, entgegengesetzt gerichtete Spannung; demgemäß weitere Erhöhung von E.

Hinzugefügt sei noch, daß wenn bei sonst unveränderten Verhältnissen eines im Vakuum befindlichen Drosselkreuzes die Luft zugelassen wird, die dabei auf der Oberfläche absorbierte Luftmenge eine Verminderung der Drosselfläche recht plausibel erscheinen läßt — was eine Steigerung von E bedeutet; ebenso umgekehrt. Genaue quantitative Versuche durchzuführen, muß außerordentlich schwierig sein.

Die mitgeteilten, ziemlich unvollständigen Versuche konnten wegen anderer Umstände nicht, wie sonst beabsichtigt, weiter fortgesetzt werden. Aus ihnen dürfte jedoch ziemlich klar folgendes hervorgehen.

Schlußfolgerungen.

1. Eine Abhängigkeit der gemessenen Charakteristik eines Drosselkreuzes von dem Luftdruck ist aus mehreren Gründen erklärlich; so muß z. B. — in Anbetracht der empfindlichen Natur der Drosselstelle — eine im Vakuum verbesserte Berührung eine Herabsetzung der Thermospannung E herbeiführen.

2. Im Hochvakuum (etwa 10^{-5} Hg) ergab ein Drosselkreuz aus Graphit jedenfalls sehr erhebliche Ausschläge, welche mit den früher bei Atmospärendruck gefundenen, bzw. bei $p = 4.5$ mm erhaltenen, recht gut übereinstimmen.

3. Für Graphit im Hochvakuum ergab sich, daß E durch eine Funktion 3. Grades der Temperaturdifferenz annähernd darstellbar ist. Dies ist für die Thermokraft im homogenen Kreise charakteristisch, und spricht entschieden gegen einen nennenswerten Einfluß einer hypothetischen Oberflächenschicht.

Stockholm, Metallographisches Institut 1925.

(Eingegangen 25. Mai 1925.)

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die Theorien des Compton-Effektes. I.

Von Gregor Wentzel.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Abschnitt: Die Wellenlängenänderung.

§ 1. Die Lichtquantentheorie (Compton, Debye).
§ 2. Halbklassische Theorien (Försterling, Halpern u. a.).
§ 3. Die dualistische Theorie (Bohr, Kramers, Slater).
§ 4. Die Prüfung der Theorien an den Nebelspuren der Rückstoßelektronen.

II. Abschnitt: Die Intensitätsprobleme.

§ 1. Die Intensitätsverteilung der Streustrahlung.
§ 2. Der Streuungs- und der Absorptionskoeffizient.
§ 3. Die Geschwindigkeitsverteilung der Rückstoßelektronen.

Später sollen folgen:

III. Abschnitt: Modellmäßige Verfeinerungen.

IV. Abschnitt: Anwendungen.

Einleitung.

Schon bei den ersten Untersuchungen der Streuung von γ-Strahlen, die heute mehr als 20 Jahre zurückliegen, wurde die Tatsache bemerkt, daß die gestreuten γ-Strahlen weicher, d. h. leichter absorbierbar sind als die Primärstrahlen[1]), und daß diese Härteverringerung mit zunehmendem Streuwinkel stärker wird[2]). Auch bei den Röntgenstrahlen wurde noch vor der Zeit der Röntgenspektroskopie festgestellt, daß mit dem Streuungsprozeß eine Abnahme der Härte verbunden ist[3]). Bei Gelegenheit einer Diskussion des gesamten experimentellen Materials gelangte A. H. Compton[4]) 1922 zu dem Schluß, daß Röntgen- und γ-Strahlen bei der Streuung eine Wellenlängenvergrößerung erleiden, die in dem Wellenlängenbereich von 0,7 bis 0,025 Å. bei einem Streuwinkel von 90° konstant rund 0,03 Å. beträgt. Zugleich veröffentlichte er Spektrometerkurven der Streustrahlung, welche den ersten spektroskopischen Nachweis der Wellenlängenänderung erbrachten. In derselben Arbeit wies Compton auf die Unmöglichkeit hin, diese Tatsache aus der klassischen elektrodynamischen Streuungstheorie zu erklären, und skizzierte eine Theorie derselben auf Grund der Vorstellung von energie- und impulsbegabten Lichtquanten. Nach dieser Theorie[5]) muß die Impulsänderung, die das Lichtquant bei der Streuung (Richtungsänderung) erleidet, durch einen Rückstoß auf das streuende Elektron kompensiert werden; bei diesem Stoß geht aber Energie verloren, was sich in einer Erniedrigung der Frequenz, bzw. in einer Erhöhung der Wellenlänge äußert. Für die Wellenlängenänderung (in Å.) erhält Compton den Ausdruck:

$$\triangle \lambda = 0{,}0484 \cdot \sin^2 \frac{\Theta}{2} \qquad (1)$$

(Θ = Streuwinkel). Unabhängig von Compton entwickelte P. Debye genau die gleiche Theorie[6]).

In Würdigung seiner Bedeutung für das Problem Wellentheorie — Lichtquantentheorie ist der Compton-Effekt seitdem von vielen Forschern untersucht worden. Wir können hier nur einige der wichtigsten experimentellen Fortschritte erwähnen. P. A. Ross[7]) fand photographisch in der Streustrahlung außer der „verschobenen" Linie, deren Wellenlänge genau um den theoretischen Wert (1) vergrößert war, noch eine schwache „unverschobene" Linie, d. h. eine Linie von der Wellenlänge der Primärstrahlung. Die Winkelabhängigkeit der Wellenlängenänderung wurde von Compton[8]) untersucht und in Übereinstimmung mit der theoretischen Formel (1) befunden. Compton und Woo[9]) wiesen ihre Unabhängigkeit von der chemischen Natur des Sekundärstrahlers nach. Dagegen konnte W. Duane[10]) lange Zeit hindurch in der Streustrahlung überhaupt keine Linie entdecken, welche der Comptonschen Formel (1) entsprach; er erhielt nur die Primärwellenlänge und außerdem eine etwas weichere Strahlung, die aber nicht der Formel (1) gehorchte und die Duane als „tertiäre" Strahlung deutete, d. h. als kontinuierliches Röntgenspektrum, emittiert von den durch die Primärstrahlung ausgelösten Photoelektronen. Man suchte zeitweise die Widersprüche zwischen Comptons und Duanes Ergebnissen dadurch aufzuklären, daß man den Einfluß des die Apparatur umgebenden Holzkastens auf die Streustrahlung untersuchte[10]). Die Diskussion hierüber dürfte aber bald ihr Ende finden, da Duane selbst sich neuerdings von der Realität des Compton-Effektes überzeugt hat[10]). Die früheren Mißerfolge erklärt er aus dem Umstand, daß seine Primärstrahlung unter zu großem Öffnungswinkel auf den Sekundärstrahler auffiel, daß infolgedessen der Streuwinkel Θ über einen größeren Bereich variierte und die Comptonsche Linie nach (1) verwischt wurde. Nachdem Duane selbst (bei kleinerem Öffnungswinkel) die Anwesenheit der nach (1) verschobenen Linie (neben der unverschobenen) festgestellt hat, ist wohl an der Realität des Compton-Effektes nicht mehr zu zweifeln. Einzelheiten der experimentellen Resultate werden wir bei der Besprechung der verschiedenen theoretischen Probleme nachtragen.

Wir befassen uns in dem vorliegenden ersten Teil dieses Berichtes nur mit der Theorie der „verschobenen" Linie. Dazu stellen wir uns mit Compton vor, daß die Röntgenstrahlen an freien Elektronen (in einem „Elektronengas") gestreut werden. Tatsächlich ist die Bindung der Elektronen in leichten Elementen gegenüber der großen (photoelektrischen) Energie harter Röntgenstrahlen verschwindend gering, so daß wir Sekundärstrahler wie Graphit, Paraffin, Aluminium in erster Näherung als „Elektronengas" idealisieren können. Auf die Versuche, auch die Bindung der streuenden Elektronen zu berücksichtigen, werden wir in einem später folgenden III. Abschnitt zu sprechen kommen.

Qualitativ ergibt auch die elektromagnetische Wellentheorie der Lichtstreuung eine Wellenverlängerung beim Streuungsvorgang. Das kommt zwar in der Streuungstheorie von J. J. Thomson nicht zum Ausdruck, da in dieser der magnetische Feldvektor und damit der Strahlungsdruck vernachlässigt wird. Rechnet man aber genauer, so wird auch klassisch das Elektronengas durch den Strahlungsdruck in der Primärrichtung in Bewegung gesetzt, und

die Wellenlänge erscheint durch Dopplereffekt vergrößert (vgl. I. Abschnitt, § 2). Dieser Dopplereffekt hat auch die gleiche Winkelabhängigkeit wie der Compton-Effekt (1)[4]), aber seine Größe ist nicht wie in (1) durch eine universelle Konstante gegeben. Die Konstante des Comptonschen Gesetzes (1) drückt sich aber folgendermaßen durch die Elementar-Konstanten aus:

$$0{,}0484\,\text{Å} = 2 \cdot \frac{\text{Plancks Wirkungsquantum}}{\text{Elektronenmasse} \cdot \text{Lichtgeschwindigkeit}}.$$

Da hier die Plancksche Konstante h eingeht, ergibt sich unabweislich, daß man nur mit Hilfe von Quantenprozessen zur Comptonschen Formel gelangen kann, d. h. im Gebiet der kurzen Wellen kann der Mechanismus des Strahlungsdruckes nicht mehr klassisch beschrieben werden, hier greifen die Quanten ein. In welcher Weise nun dieses Eingreifen vor sich geht, wie man sich den Mechanismus des Strahlungsdruckes (des „Rückstoßes") im einzelnen zu denken hat, darüber gibt es verschiedene Meinungen. Die Verhältnisse liegen hier ganz ähnlich wie bei der Theorie des Planckschen Hohlraumspektrums: die Richtigkeit der Planckschen Formel wird allgemein anerkannt, aber ihre Ableitung gelingt auf verschiedensten Wegen, auf Grund der verschiedensten Modellvorstellungen und Quantenhypothesen. Als Extreme kann man wohl Plancks zweite Theorie als möglichst klassische und Einsteins Ableitung von 1916 als extrem lichtquantenhafte ansehen; dazwischen gibt es alle möglichen Varianten. Beim Problem des Compton-Effektes haben wir als Analogon der Einsteinschen Ableitung die Lichtquantentheorie von Compton[5]) und Debye[6]) anzusehen, die sich ebenso wie jene durch äußerste Einfachheit und Eleganz auszeichnet. Man kann sich aber auch die Aufgabe stellen — das haben K. Försterling[11]) und O. Halpern[12]) getan —, den Strahlungsdruck so weitgehend wie möglich aus der elektromagnetischen Wellentheorie zu berechnen und das Ergebnis, die Comptonsche Formel (1), durch einen möglichst unscheinbaren Quanteneingriff zu erzwingen. Ganz neuartige dualistische Vorstellungen, die darauf hinzielen, Wellen- und Quantenvorstellungen zu vereinen, sind kürzlich von Bohr, Kramers und Slater[13]) entwickelt worden; hierbei wird das Hauptgewicht auf die Wellenvorgänge gelegt; die Lichtquantenprozesse sind mit jenen nur lose statistisch verknüpft. Die verschiedenen Auffassungen des Strahlungsdruckmechanismus führen natürlich zu verschiedenen Konsequenzen hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung der Rückstoßelektronen; hier ist eine experimentelle Entscheidung möglich. C. T. R. Wilson[14]) und W. Bothe[15]) fanden nämlich unabhängig voneinander in den Nebelspuren der von Röntgenstrahlen ausgelösten sekundären Kathodenstrahlen kurze, nach vorn gerichtete Spuren, die sie nach der Größenordnung und Wellenlängenabhängigkeit ihrer Reichweite mit den Compton-Debyeschen Rückstoßelektronen identifizierten (Bothe deutete sie erst fälschlich als H-Strahlen). Wir werden über die verschiedenen Theorien und ihre experimentelle Prüfung im I. Abschnitt berichten.

Während sich in der Wellentheorie Frequenz- und Intensitätsverhältnisse aus den gleichen Überlegungen ergeben, stellt die Intensitätsfrage in der Quantentheorie ein besonderes Problem dar, dessen Lösung in der Regel viel unsicherer und logisch weniger befriedigend ist. Als einziger Wegweiser dient hier das Bohrsche Korrespondenzprinzip, das allgemein gesprochen aussagt, daß qualitativ die klassische Intensitätsberechnung für die Quantenvorgänge verbindlich ist; in dem Grenzfalle, wo die klassisch und quantentheoretisch berechneten Frequenzen identisch werden, werden auch die so berechneten Intensitäten exakt richtig. In unserem Falle, wo es sich um die Intensitätsverteilung der in verschiedene Richtungen gestreuten Strahlung handelt, sind die Aussagen des Korrespondenzprinzips besonders mager und haben auch dementsprechend vielfältige Auslegungen gefunden. Während aber in der Frequenzfrage die verschiedenen Theorien zur gleichen Endformel (1) führen, ist das Ergebnis in der Intensitätsfrage durchaus kein eindeutiges. Wir werden aber zeigen können, daß nur eine der bisher aufgestellten Intensitätsformeln, nämlich die von Compton selbst herrührende, mit dem Experiment verträglich ist. Der experimentelle Befund geht dahin, daß bei γ-Strahlen eine Unterdrückung der rückwärtigen Streustrahlung ($\Theta > \pi/2$) stattfindet; dies hat erstens eine Asymmetrie der Intensitätsverteilung zur Folge, die Streustrahlung geht überwiegend einseitig nach vorn; zweitens bleibt die gesamte Sekundärintensität unter dem Werte, den Thomson aus der elektromagnetischen Theorie berechnet. In diesen Abweichungen von der Thomsonschen Theorie, deren Entdeckung fast ebenso lange zurückliegt wie die der Härteverringerung[16]), wurden schon früher Anzeichen von Quanteneingriffen vermutet[17]), und sowohl Compton[5]) als Debye[6]) führten dieselben als starkes Argument zugunsten ihrer Rückstoßtheorie an. — Kennt man einmal die Intensitätsverteilung der Streustrahlung, so ist damit zugleich auch die Geschwindigkeitsverteilung der Rückstoßelektronen bekannt. Hier kann die Theorie wiederum

an den Wilsonschen Nebelspuren geprüft werden. Wir werden das Problem der Intensitätsverteilung und zugehörige Fragen im II. Abschnitt besprechen.

Im III. Abschnitt endlich möchten wir alle diejenigen Untersuchungen zusammenfassen, die auf eine modellmäßige Verfeinerung der Theorie hinzielen. Hierher gehört in erster Linie der interessante Versuch von Compton[18], die Bindung der streuenden Elektronen zu berücksichtigen und dadurch die Natur der Duaneschen „Tertiärstrahlung" aufzuklären. Da aber die Realität der letzteren durch die neuesten experimentellen Untersuchungen[10] in Zweifel gestellt ist, halten wir es für angemessen, die Besprechung dieses Problems sowie der Anwendungen der Theorie (IV. Abschnitt) auf einen späteren Zeitpunkt zu vertagen.

I. Abschnitt.

Die Wellenlängenänderung.

§ 1. Die Lichtquantentheorie.

Wir beginnen mit der Theorie von Compton[5] und Debye[6], welche den Vorzug größter Einfachheit und völliger innerer Konsequenz besitzt. Sie betrachtet mit Einstein Lichtstrahlen von der Frequenz ν und der Wellenlänge $\lambda = c/\nu$ als Korpuskeln, die sich mit der Geschwindigkeit c bewegen und die Energie $h\nu$ sowie den Impuls $h\nu/c = h/\lambda$ in der Bewegungsrichtung besitzen.

Fig. 1 erläutert die kinematischen Verhältnisse: ein Lichtquant von der Energie $h\nu_0$ trifft

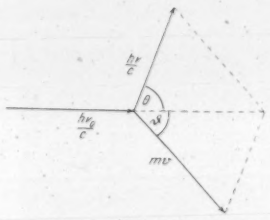


Fig. 1.

auf ein bis dahin ruhendes Elektron, wird von diesem um den Winkel Θ abgelenkt und erteilt damit zugleich dem Elektron einen Stoß in einer Richtung, welche mit dem Primärstrahl den Winkel ϑ bildet. Die dem Elektron erteilte Geschwindigkeit sei v und das sekundäre Lichtquant habe die Energie $h\nu$.

Die Größen ν_0, ν, v, Θ, ϑ sind nicht unabhängig voneinander, da für den beschriebenen Prozeß die Sätze von der Erhaltung der Energie und des Impulses gelten sollen. Zunächst folgt aus dem Impulssatz, daß die Richtungen Θ und ϑ mit der Primärrichtung in einer Ebene liegen. Für die zwei anderen Impulskomponenten gilt dann:

$$\left.\begin{aligned} \frac{h\nu_0}{c} &= m v \cos\vartheta + \frac{h\nu}{c}\cos\Theta \\ 0 &= -m v \sin\vartheta + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta, \end{aligned}\right| \qquad (2)$$

und der Energiesatz besagt:

$$h\nu_0 = {}^1/_2\, m v^2 + h\nu. \qquad (3)$$

Aus (2) erhält man durch Elimination von ϑ:

$$\left(\frac{h\nu_0}{c}\right)^2 + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 - 2\cdot\frac{h\nu_0}{c}\cdot\frac{h\nu}{c}\cos\Theta = (mv)^2, \qquad (4)$$

welche Relation man auch aus Fig. 1 unmittelbar mittels des Cosinussatzes ablesen kann.

Durch die drei Gleichungen (2), (3) sind drei der fünf Unbekannten als Funktion der beiden übrigen zu bestimmen. Wählen wir ν_0 und Θ als unabhängige Variable, d. h. denken wir uns die Primärfrequenz und den Streuwinkel gegeben. Dann befriedigt man die Gleichungen (3) und (4), indem man setzt:

$$\nu = \nu_0 - \frac{h}{mc^2}\nu_0^2(1-\cos\Theta) \qquad (5)$$

$$v^2 = 2\left(\frac{h}{mc}\right)^2\nu_0^2(1-\cos\Theta). \qquad (6)$$

Wie man leicht sieht, wird durch diesen Ansatz zwar Gl. (3) exakt, Gl. (4) aber nur angenähert erfüllt, wenn

$$h\nu_0 \ll mc^2 \qquad (7)$$

vorausgesetzt ist. Für die Wellenlängendifferenz erhält man aus (5):

$$\left.\begin{aligned} \lambda - \lambda_0 &= c\cdot\frac{\nu_0-\nu}{\nu_0^2} = \Lambda(1-\cos\Theta) = \\ &= 2\Lambda\sin^2\frac{\Theta}{2}, \end{aligned}\right| \qquad (8)$$

wo

$$\Lambda = \frac{h}{mc} = 0{,}0242\ \text{Å} \qquad (9)$$

eine universelle Länge ist. Setzt man die bekannten Zahlwerte von h, m und c ein, so geht Gl. (8) in Gl. (1) über. Λ ist die „Wellenlänge" desjenigen Lichtquantes, welches die Energie $\frac{hc}{\Lambda} = mc^2$ besitzt, d. h. dessen Masse gleich der Elektronenmasse m ist. Aus (8) geht hervor, daß die Wellenlängenänderung bei sehr kleinem Streuwinkel Θ verschwindend klein ist und bei genau rückwärtiger Streuung ($\Theta = \pi$) ihr Maximum 2Λ erreicht; bei der Streuung um $\Theta = \frac{\pi}{2}$ ist sie gleich Λ. Genau proportional mit

derselben geht nach (6) die kinetische Energie des gestoßenen Elektrons. Die Stoßrichtung ϑ ergibt sich aus (2):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v \sin\Theta}{\nu_0 - v\cos\Theta} \tag{10}$$

Da wegen (7) v nur wenig von ν_0 verschieden ist, wird angenähert:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sin\Theta}{1-\cos\Theta} = \operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2},\quad \vartheta = \frac{\pi}{2} - \frac{\Theta}{2}. \tag{11}$$

Wächst also der Streuwinkel Θ von o bis π, so nimmt der die Stoßrichtung beschreibende Winkel ϑ von $\frac{\pi}{2}$ bis o ab, wie auch aus Fig. 1 direkt hervorgeht.

Die Ungleichung (7), die man unter Benutzung der Bezeichnung (9) auch

$$\frac{c}{\nu_0} = \lambda_0 >> \Lambda \tag{7}$$

schreiben kann, ist bei Röntgenstrahlen, deren Wellenlängen von der Größenordnung 1 Å sind, sehr gut erfüllt. Anders dagegen bei γ-Strahlen, deren Wellenlängen bereits von der Größenordnung $^1/_{10}$ bis $^1/_{100}$ Å., also von der Größenordnung der charakteristischen Länge Λ sind. In diesem Falle ist die obige Rechnung nicht mehr exakt, nicht nur wegen der in (4) begangenen Vernachlässigung, sondern auch, weil nach (6) die Geschwindigkeit v des gestoßenen Elektrons von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c wird. Für γ-Strahlen sind also auch die Ansatzgleichungen (2), (3) nicht mehr exakt; wir müssen jetzt auch die relativistische Veränderlichkeit der Elektronenmasse in Betracht ziehen. Indem wir unter m jetzt die Ruhmasse des Elektrons verstehen, wird der relativistische Impuls

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

und die relativistische kinetische Energie lautet bekanntlich:

$$mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] = T. \tag{12}$$

Impuls- und Energiesatz lauten demnach statt (2) und (3):

$$\begin{aligned} \frac{h\nu_0}{c} &= \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cos\vartheta + \frac{h\nu}{c}\cos\Theta \\ 0 &= -\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin\vartheta + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta \end{aligned} \tag{2a}$$

$$h\nu_0 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] + h\nu. \tag{3a}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen soll hier nicht im einzelnen durchgeführt werden; wir verweisen in dieser Hinsicht auf die schon mehrfach zitierte Arbeit von Debye[6]) und geben nur das Resultat an. An Stelle von (5) und (8) kommt genauer

$$v = \frac{\nu_0}{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}(1-\cos\Theta)} \tag{5a}$$

$$\lambda - \lambda_0 = c\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0}\right) = \Lambda\left(1-\cos\Theta\right) = 2\Lambda\sin^2\frac{\Theta}{2}. \tag{8a}$$

Bei exakter Rechnung ergibt sich also für die Wellenlängenänderung genau der früher (8) angegebene Wert; Gl. (1) gilt also auch für γ-Strahlen. Für die Stoßrichtung folgt aus (10) statt (11):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\lambda_0}{\Lambda + \lambda_0}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\Theta}{2}, \tag{11a}$$

und für die Stoßenergie (12) an Stelle von (6):

$$\begin{aligned} T = h(\nu_0 - \nu) &= h\nu_0\frac{\Lambda(1-\cos\Theta)}{\lambda_0 + \Lambda(1-\cos\Theta)} \\ &= h\nu_0\frac{2\Lambda\lambda_0}{\lambda_0(\lambda_0+2\Lambda) + (\lambda_0+\Lambda)^2\operatorname{tg}^2\vartheta}. \end{aligned} \tag{6a}$$

Zur Veranschaulichung geben wir hier eine Figur von Debye[6]) wieder. In dieser sind einerseits für verschiedene Streuwinkel ($\Theta = 20^0$, 40^0 usw.) die $h\nu$-Werte des Sekundärquants als Pfeillängen aufgetragen, andererseits die zugehörigen Stoßrichtungen bzw. Stoßenergien in entsprechender Weise angedeutet. Die Längen zweier zusammengehöriger Pfeile $h\nu$ bzw. T (durch die gleiche Nummer gekennzeichnet) ergänzen sich jeweils zur Primärenergie $h\nu_0$. Die

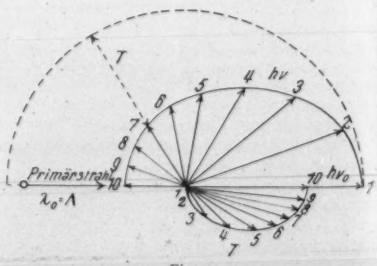


Fig. 2.

Figur ist gezeichnet für die Primärwellenlänge $\lambda_0 = \Lambda$; hier wird nach (5a) bzw. (6a) für $\Theta = \pi$:

$$\nu = \frac{\nu_0}{3}, \quad T = \frac{2h\nu_0}{3}.$$

Den bisherigen allgemeinen Betrachtungen fügen wir noch drei ergänzende Bemerkungen bei:

a) Ist das streuende Massenteilchen nicht ein Elektron, sondern etwa ein Atomkern (oder ein ganzes Atom), so stellt m eine entsprechend größere Masse dar, und die betreffende charakteristische Länge Λ wird nach (9) so klein, daß selbst für härteste Strahlen die Wellenlängenänderung nicht mehr beobachtbar sein dürfte. Es liegt nahe, die von Ross[7]) entdeckte „unverschobene" Linie (vgl. die Einleitung) durch Streuung an schwereren Zentren zu erklären. Wir werden im III. Abschnitt auf diesen Punkt zurückkommen.

b) Wir haben bisher vorausgesetzt, daß das streuende Teilchen vor dem Prozeß ruht. Besitzt dasselbe dagegen eine gewisse Anfangsgeschwindigkeit v_0, die mit der primären Strahlrichtung den Winkel ϑ_0 bildet, so lauten Energie- und Impulssatz statt (2a), (3a):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{m v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\cos\vartheta_0 + \frac{h\nu_0}{c} &= \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\cos\vartheta + \frac{h\nu}{c}\cos\Theta \\
-\frac{m v_0}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}}\sin\vartheta_0 &= -\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin\vartheta\cos\varphi + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta\cos\Phi \\
0 &= -\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta\sin\Phi
\end{aligned}\right\} \quad (2b)$$

$$mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}} - 1\right] + h\nu_0 = mc^2\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right] + h\nu. \quad (3b)$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ist von L. de Broglie[19]) durchgeführt worden. Führt man den Winkel ψ ein, der von der Anfangsrichtung des Elektrons und der Endrichtung des Lichtquants eingeschlossen wird:

$$\cos\psi = \cos\vartheta_0\cos\Theta - \sin\vartheta_0\sin\Theta\cos\Phi, \quad (13)$$

so kommt nach de Broglie:

$$\nu = \nu_0 \frac{1 - \frac{v_0}{c}\cos\vartheta_0}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\psi + \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\cdot\frac{\Lambda}{\lambda_0}\cdot(1-\cos\Theta)} \quad (5b)$$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{\lambda_0\cdot\frac{v_0}{c}(\cos\vartheta_0 - \cos\psi) + \sqrt{1-\frac{v_0^2}{c^2}}\cdot\Lambda(1-\cos\Theta)}{1-\frac{v_0}{c}\cos\vartheta_0}. \quad (8b)$$

Für $v_0 = 0$ gehen diese Formeln natürlich wieder in (5a), (8a) über. Ist andererseits die Anfangsgeschwindigkeit hinreichend groß $\left(\frac{v_0}{c} >> \frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)$, so tritt der Compton-Effekt völlig zurück; die Formeln (5b), (8b) stellen dann den gewöhnlichen Doppler-Effekt für die Streuung an einem bewegten Elektron dar (vgl. das unter c) Gesagte). Während nach (5a) immer $\nu < \nu_0$ ist, d. h. immer eine Energieverminderung des Lichtes eintritt, kann nach (5b) unter Umständen auch $\nu > \nu_0$ werden, nämlich dann, wenn die Geschwindigkeit des Elektrons durch den Stoß vermindert wird; das ist immer dann der Fall, wenn die Anfangsgeschwindigkeit rückläufig $\left(\vartheta_0 > \frac{\pi}{2}\right)$ und hinreichend groß ist. Für $\vartheta_0 = \pi$ ($\cos\psi = -\cos\Theta$) z. B. ist

$$\nu \gtrless \nu_0, \text{ je nachdem } \frac{v_0}{\sqrt{c^2 - v_0^2}} \gtrless \frac{\Lambda}{\lambda_0}.$$

Praktisch ist natürlich nur der Fall sehr kleiner Geschwindigkeit v_0 von Bedeutung.

c) Daß sich in (5b) ohne weiteres der von der Bewegung des Streuungszentrums herrührende Doppler-Effekt einstellt, hängt aufs engste zusammen mit der von E. Schrödinger[20]) ent-

deckten Tatsache, daß der Doppler-Effekt eines bewegten Emissions- oder Absorptionszentrums aus dem Rückstoß des emittierten bzw. absorbierten Lichtquants berechnet werden kann; da nämlich der Streuungsvorgang immer aus einem Absorptions- und einem darauf folgenden Emissionsvorgang zusammengesetzt gedacht werden kann (vgl. § 2), versteht man das Resultat von de Broglie (für $\Delta = 0$) unmittelbar aus dem von Schrödinger.

Wir wollen die Überlegungen von Schrödinger hier in einer Weise darstellen, welche die Beziehungen zu der Theorie von Compton und Debye klar hervortreten läßt. Der Einfachheit halber rechnen wir unrelativistisch. Betrachten wir den *Emissions*vorgang eines mit der Geschwindigkeit v_0 bewegten Atoms. Der Unterschied gegenüber dem *Streuungs*vorgang besteht darin, daß das primäre Energiequant $h\nu_0$ nicht durch einen ankommenden Lichtstrahl, sondern von der inneren Energie des Atoms geliefert wird. Aus diesem Grunde spielt also das Quant $h\nu_0$ bei der Impulsbilanz jetzt keine Rolle (wenigstens wenn man unrelativistisch rechnet), und man erhält also als Impulserhaltungsformeln an Stelle von (2b):

$$\left.\begin{aligned} m v_0 \cos\vartheta_0 &= m v \cos\vartheta + \frac{h\nu}{c}\cos\Theta \\ -m v_0 \sin\vartheta_0 &= -m v \sin\vartheta\cos\varphi + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta\cos\Phi \\ 0 &= -m v \sin\vartheta\sin\varphi + \frac{h\nu}{c}\sin\Theta\sin\Phi \end{aligned}\right\} \qquad (2c)$$

Dagegen bleibt die Formulierung des Energiesatzes unverändert (3b):

$$\tfrac{1}{2} m v_0^2 + h\nu_0 = \tfrac{1}{2} m v^2 + h\nu. \qquad (3c)$$

Eliminiert man hier wiederum ϑ, φ und v, so erhält man, unter Benutzung von (13):

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\psi + \frac{1}{2}\frac{h\nu}{mc^2}} = \frac{\nu_0}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\psi + \frac{1}{2}\frac{\Delta}{\lambda}}. \qquad (5c)$$

ψ ist nach Definition der Winkel zwischen der Richtung der anfänglichen Geschwindigkeit v_0 und der Emissionsrichtung. Für $\lambda >> \Delta$ geht also (5c) in die bekannte Formel des Doppler-Effektes über. Es macht sich aber im Prinzip noch eine Spur des Rückstoßes oder, wenn man so sagen will, des Compton-Effektes geltend. Die Geschwindigkeit des Atoms wird eben beim Emissionsprozeß durch den Rückstoß geändert, und infolgedessen geht in (5c) eine scheinbare Geschwindigkeit ein, die ein Mittelwert zwischen Anfangs- und Endgeschwindigkeit ist. In der Tat ersieht man aus (2c) leicht, daß

$$\frac{v_0}{c}\cos\psi - \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{v}{c}\cos\chi$$

ist, wo χ den Winkel zwischen der Emissionsrichtung und der Endgeschwindigkeit v des Atoms bedeutet. Folglich kann man (5c) auch schreiben:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{1}{c}\cdot\frac{v_0\cos\psi + v\cos\chi}{2}}. \qquad (14)$$

Die scheinbare Geschwindigkeitskomponente ist also das arithmetische Mittel aus den Komponenten der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit des Atoms auf die Emissionsrichtung. Rechnet man relativistisch, so erhält man auch den Doppler-Effekt zweiter Ordnung in Übereinstimmung mit der Wellentheorie; doch hat dann, wie Schrödinger[20]) zeigt, nicht eine arithmetische sondern eine geometrische Mittelbildung über die Doppler-Effekte von Anfangs- und Endzustand stattzufinden.

§ 2. Halbklassische Theorien.

Alle halbklassischen Theorien des Compton-Effektes bauen auf der in der Einleitung erwähnten, zuerst von Compton[5]) bemerkten Tatsache auf, daß die Winkelabhängigkeit der Comptonschen Wellenlängenänderung übereinstimmt mit der des Doppler-Effektes für die Streuung an einem in der Primärrichtung bewegten Elektron. In der Tat: sei die Primärfrequenz wieder mit ν_0 und die Geschwindigkeit des Elektrons (diesmal parallel dem Lichtstrahl, $\vartheta_0 = 0$) $v_0 = \beta \cdot c$, so führt das Elektron (klassisch!) erzwungene Schwingungen aus von der Frequenz

$$\nu_1 = \nu_0 \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1+\beta}. \qquad (15)$$

Die hierdurch emittierten Sekundärwellen haben für einen ruhenden, unter dem Winkel Θ zur Primärrichtung stehenden Beobachter die Frequenz

$$\nu = \nu_1 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\Theta} = \nu_0 \frac{1-\beta}{1-\beta\cos\Theta} \qquad (16)$$

[vgl. (5b) mit $\vartheta_0 = 0$, $\psi = \Theta$!]. Die Wellen-

längendifferenz des Doppler-Effektes ist demnach:

$$\lambda - \lambda_0 = c\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu_0}\right) = \lambda_0 \frac{\beta}{1-\beta}\left(1 - \cos\Theta\right). \quad (17)$$

Dies stimmt mit dem Compton-Effekt (8a) überein, wenn

$$\frac{\beta}{1-\beta} = \frac{A}{\lambda_0}, \quad \beta = \frac{A}{A+\lambda_0}. \quad (18)$$

Man kann demnach den Compton-Effekt als einen gewöhnlichen Doppler-Effekt auffassen, wenn es gelingt, aus einer quantenmäßigen Vorstellung über den Mechanismus des Strahlungsdruckes zu verstehen, warum das Elektron während der Sekundäremission die Translationsgeschwindigkeit

$$\beta c = c\frac{A}{A+\lambda_0} = c\frac{h\nu_0}{h\nu_0 + mc^2} \quad (19)$$

besitzt. Daß dies auf rein klassischem Wege nicht möglich ist, ist ohne weiteres klar. Immerhin, nimmt man sich einmal vor, die sekundäre Strahlung wellenmäßig aufzufassen, so wird man auch versuchen müssen, die Wirkung der Primärstrahlung, hier also den Strahlungsdruck, so „klassisch" wie möglich zu verstehen. Wellentheoretisch besteht die Wirkung des Strahlungsdruckes in einer allmählichen Beschleunigung des Elektrons in der Strahlrichtung. Diese kontinuierliche Beschleunigung ist, wie Försterling[11]) und Lenz[21]) bemerkt haben, das klassische Analogon des Compton-Debyeschen Rückstoßes. Wir wollen nun die Wirkung des klassischen Strahlungsdruckes nach dem Vorgang von K. Försterling[11]) und O. Halpern[12]) näher verfolgen und zusehen, ob sich nicht dabei eine passende Gelegenheit zur quantenmäßigen Auszeichnung der Geschwindigkeit (19) bietet.

Wir betrachten die Wirkung einer ebenen, in der z-Richtung fortschreitenden linear polarisierten Lichtwelle

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{E}_x = \mathfrak{H}_y &= A\cos\left[2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right] \\ \mathfrak{E}_y = \mathfrak{E}_z = \mathfrak{H}_x &= \mathfrak{H}_z = 0 \end{aligned}\right| \quad (20)$$

auf ein freies, zur Zeit $t = 0$ ruhendes Elektron. Wir rechnen unrelativistisch, d. h. nur bis auf Größen von der Ordnung v/c, berücksichtigen aber den Strahlungswiderstand, weil dieser für die Beschreibung des Strahlungsdruckes wesentlich ist. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons lauten dann (vgl. Halpern, l. c. S. 164):

$$m\ddot{x} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{x} = e\left\{\mathfrak{E}_x + \frac{1}{c}\left(\dot{y}\mathfrak{H}_z - \dot{z}\mathfrak{H}_y\right)\right| = eA\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right)\cos\left[2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right] \quad (21)$$

$$m\ddot{y} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{y} = e\left\{\mathfrak{E}_y + \frac{1}{c}\left(\dot{z}\mathfrak{H}_x - \dot{x}\mathfrak{H}_z\right)\right| = 0 \quad (22)$$

$$m\ddot{z} - \frac{2e^2}{3c^3}\dddot{z} = e\left\{\mathfrak{E}_z + \frac{1}{c}\left(\dot{x}\mathfrak{H}_y - \dot{y}\mathfrak{H}_x\right)\right| = eA\cdot\frac{\dot{x}}{c}\cos\left[2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right] \quad (23)$$

Die Integration, auf deren Einzelheiten wir nicht eingehen wollen, führt Halpern durch sukzessive Näherung aus. In erster Näherung wird (entsprechend der Thomsonschen Lösung) $y = z = 0$ gesetzt und Gl. (21) unter Berücksichtigung des Dämpfungsgliedes integriert. Der so erhaltene Näherungswert von $\dot{x}$ wird dann in Gl. (23) eingeführt. Deren Integral wird nun wieder in Gl. (21) eingesetzt und zu ihrer genaueren Integration benutzt. Eine Weiterführung der Näherung würde nur die Glieder von der Ordnung v^2/c^2 beeinflussen, welche ja vernachlässigt werden sollten. Die Endformeln lauten folgendermaßen:

$$\left.\begin{aligned} m\dot{x} &= \frac{eA}{2\pi\nu_0}\left|\sin\left[2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right] - \sin\delta\right| + \frac{2e^2}{3mc^3}\cdot eA\left\{\cos\left[2\pi\nu_0\left(t - \frac{z}{c}\right) + \delta\right] - \cos\delta\right| \\ m\dot{y} &= 0 \qquad\qquad y = 0 \\ m\dot{z} &= \frac{e^4A^2}{3m^2c^4}\cdot t \qquad\qquad z = \frac{e^4A^2}{6m^3c^4}\cdot t^2 \end{aligned}\right| \quad (24)$$

Gegenüber den Thomsonschen Formeln, die eine reine Schwingung in der x-Richtung angeben, sind folgende Änderungen festzustellen: erstens tritt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in der z-Richtung hinzu, zweitens eine gleichförmige Translation in der x-Richtung, die wesentlich von der Phase δ der einfallenden Welle abhängt. Infolge der Bewegung in der Strahlrichtung erleidet die Frequenz der x-Schwingung eine Doppler-Verschiebung

$$\nu_1 = \nu_0\left(1 - \frac{\dot{z}}{c}\right), \quad (25)$$

deren Betrag nach (24) linear mit der Zeit zunimmt.

Halpern betrachtet die durch (24) be-

schriebene parabolische Translationsbewegung des Elektrons im Sinne des Bohrschen Korrespondenzprinzips als klassisches Analogon zu der gradlinigen Bewegung der Compton-Debyeschen Lichtquantentheorie. In der Tat ist hier wie dort der Geschwindigkeitsvektor immer in die vordere (emergente) Halbkugel gerichtet $\left(\vartheta < \frac{\pi}{2}\right)$; ob die Bewegung in der positiven oder negativen x-Richtung erfolgt, hängt vom „Zufall" ab, in der Rechnung von Halpern nämlich von der Phase δ; beide Richtungen sind gleich wahrscheinlich. Man fühlt sich hier an Einsteins ebenfalls „zufällige" positive oder negative Absorption erinnert, deren klassisches Analogon von der Phase der einfallenden Welle abhängt. Man beachte übrigens, daß auch in der Lichtquantentheorie die mittlere Bewegung des Elektrons nach langen Zeiten, d. h. nach vielen Streuungsprozessen, eine parabolische sein wird, da ja sein Impuls in der z-Richtung im Mittel proportional t, sein Impuls in der x- und y-Richtung aber nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung proportional zu $\sqrt{t}$ anwächst.

Die von einem ruhenden Beobachter gemessene Sekundärfrequenz ist nach (25):

$$\left.\begin{aligned} \nu = \nu_1 \frac{1}{1 - \frac{\dot{x}}{c}\cos\Phi - \frac{\dot{z}}{c}\cos\Theta} = \\ = \nu_0 \frac{1 - \frac{\dot{z}}{c}}{1 - \frac{\dot{x}}{c}\cos\Phi - \frac{\dot{z}}{c}\cos\Theta}, \end{aligned}\right| \qquad (26)$$

Φ und Θ bedeuten hier die Winkel zwischen Emissionsrichtung und x- bzw. z-Achse; für $\dot{x}$ ist ein Mittelwert einzusetzen. Die Frequenz (26) ist natürlich zeitabhängig, da $\dot{z}$ unbeschränkt mit der Zeit anwächst, wenigstens solange keine äußere Störung erfolgt.

Wir haben uns also jetzt die Frage zu stellen, wie sich der Wert (19) für $\dot{z}$ quantenmäßig auszeichnen läßt. Zu diesem Zwecke berechnen wir die in der Zeit von o bis t ausgestrahlte Energie:

$$E = \int_0^t \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{x}^2 dt = \frac{e^4 A^2}{3m^2c^3}\cdot t = c\cdot m\dot{z}. \qquad (27)$$

Man kann diese Gleichung auch sofort aus dem Impulssatz ableiten: Der der ebenen Welle durch Zerstreuung entzogene Impuls E/c muß sich in dem translatorischen Impuls $m\dot{z}$ des Elektrons wiederfinden. Wir sehen nun leicht, daß $\dot{z}$ den Wert (19) gerade dann erreicht, wenn die zerstreute Energie (27) den Betrag $h\nu_0$ ausmacht. In der Tat folgt aus $E = h\nu_0$:

$$\dot{z} = \frac{h\nu_0}{cm} = A\nu_0 = c\frac{A}{\lambda_0}, \qquad (28)$$

was bei unserer Rechengenauigkeit ($\dot{z} \ll c$, $\lambda_0 \gg A$) mit (19) übereinstimmt.

Man kann sich also etwa die Vorstellung bilden, daß der Streuungsvorgang solange aussetzt, bis die klassisch gerechnete Energie E den Quantenwert $h\nu_0$ erreicht hat, und dann ruckweise vor sich geht. Die Verwandtschaft dieses Mechanismus zu demjenigen, den Planck bei seiner zweiten Strahlungstheorie verwendet, liegt auf der Hand. Man muß das Dämpfungsglied zur Beschreibung der Bewegung beibehalten, obwohl die damit verbundene kontinuierliche Ausstrahlung nicht stattfindet; der Strahlungsdruck sorgt dann dafür, daß gerade dann, wenn $E = h\nu_0$ ist und der Streuungsprozeß stattfindet, $\dot{z}$ den Wert (19) erreicht, so daß der Doppler-Effekt (26) numerisch mit dem Compton-Effekt (1) zur Deckung kommt. Eine Schwierigkeit bietet allerdings der von $\dot{x}$ herrührende Dopper-Effekt in (26); dazu gibt es in der Compton-Debyeschen Theorie kein Gegenstück. Die Schwierigkeit entfällt, wenn man etwa das Lichtfeld adiabatisch von Null anwachsen läßt; dann wird zweifellos im Zeitmittel $\dot{x} = o$. In dieser Auffassung würde die Seitwärtsstreuung der Elektronen zwar — hinsichtlich der Analogie zur Lichtquantentheorie — von prinzipieller Bedeutung, aber praktisch nicht wahrnehmbar sein.

Es steht natürlich auch nichts im Wege, sich eine sprunghafte Änderung von $\dot{z}$ [von o auf den Betrag (19)] vorzustellen. Derartige Kompromißtheorien sind von C. T. R. Wilson[14]) und Bauer[22]) vorgeschlagen worden; sie laufen im Grunde auf die Vorstellung hinaus, daß der Primärstrahl als Quant absorbiert wird und einen Rückstoß (19) erteilt, während der Sekundärstrahl ohne Rückstoßwirkung als Kugelwelle emittiert wird. Diese Vorstellung nähert sich wieder der Lichtquantenauffassung, freilich nur bis zu einem gewissen Grade; denn namentlich hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen dürften sich die Unterschiede zwischen der wellen- und der quantenmäßigen Auffassung des Strahlungsdruckes kaum ausgleichen lassen.

Integriert man das klassische Problem bis auf die Glieder von der Ordnung v^2/c^2 genau, führt man also die Näherung einen Schritt weiter, so treten nach Halpern zu den Bewegungen (24) noch Schwingungen in der x- und z-Richtung hinzu, welche außer der Schwingung ν_1 (25) auch deren Oberschwin-

gungen enthalten. Der k-ten Oberschwingung entspricht aber als korrespondenzmäßiges Gegenstück ein solcher Quantenvorgang, bei welchem k Lichtquanten ν_0 bei einem Streuungsvorgang in ein einziges Quant $k\nu$ umgewandelt werden. In der Lichtquantenauffassung hat man aus dem Umstande, daß jene Oberschwingungen mit endlichem Fourier-Koeffizienten auftreten, nach dem Korrespondenzprinzip zu schließen, daß die dazu analogen Quantenprozesse tatsächlich vorkommen, allerdings bei kleinen Geschwindigkeiten des Elektrons äußerst selten im Vergleich zu den normalen, in § 1 beschriebenen Streuungsprozessen.

Die relativistische Behandlung des Problems ist nach Halpern nur dann durchführbar, wenn man den Strahlungswiderstand vernachlässigt, was nur für kleine Zeiten zulässig ist[23]). Man kann aber, wie insbesondere Försterling hervorgehoben hat, auf die detaillierte Kenntnis der Bewegung des Elektrons verzichten, da für die Frequenzbestimmung der Impulssatz bereits ausreicht. Man braucht nur die Relation (27):

$$\frac{E}{c} = \frac{h\nu_0}{c} = m\dot{z}$$

relativistisch zu verfeinern.

Denken wir uns wieder, um die Ideen zu fixieren, die Energie der zu emittierenden Welle latent aufgespeichert, bis sie den Quantenwert $h\nu_0$ erreicht. Der der Primärwelle bis zu diesem Moment entzogene Impuls muß sich in dem Impuls des Elektrons wiederfinden. Der Impulssatz schreibt sich am einfachsten im Bezugssystem des Elektrons, weil in diesem die zerstreute Energie impulslos ist. Die gesamte Impulsänderung des Elektrons ist ($\beta = z/c$):

$$\frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Der Impulsverlust der Primärwelle andererseits ist gleich E/c, wo E der quantenmäßig festgesetzte Energieverlust ist. In unserem Bezugssystem ist aber die Frequenz ν_1 (15) maßgebend, und der Quantenwert von E ist also offenbar gleich $h\nu_1$ anzusetzen. Folglich:

$$\frac{E}{c} = \frac{h\nu_1}{c} = \frac{h\nu_0\sqrt{1-\beta^2}}{c\,(1+\beta)} = \frac{m\beta c}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Für die kritische Geschwindigkeit βc, bei welcher die Streuung sich ereignet, erhält man hieraus exakt den Wert (19). Hinsichtlich der Frequenz herrscht also auch in der relativistischen Verfeinerung völlige Übereinstimmung zwischen der halbklassischen und der extremen Quantentheorie. Selbstverständlich paßt die hier gegebene Formulierung des Impulssatzes wieder zu verschiedenen modellmäßigen Bildern des Strahlungsdruckes; sie liegt auch im Prinzip allen von verschiedenen Seiten gegebenen halbklassischen Abteilungen der Compton-Formel[11]), [12]), [22]), [21]) zugrunde, die sich äußerlich in den mechanischen Vorstellungen teilweise erheblich unterscheiden.

Es sei bemerkt, daß obige Überlegung sich auch auf den Fall des anfangs bewegten Elektrons (§ 1, b) übertragen läßt. An Stelle der Geschwindigkeit (19) tritt dann naturgemäß diejenige Geschwindigkeit, die aus der geometrischen Addition der beiden Primärimpulse (der Strahlung und des Elektrons) resultiert; dieselbe ist natürlich gegen die primäre Strahlrichtung geneigt. Berechnet man den Doppler-Effekt der bei dieser Geschwindigkeit gestreuten Strahlung, so kommt man genau auf die Formel (8b), S. 441, welche de Broglie aus der Stoßvorstellung ableitet. Geht man zu immer höheren Anfangsgeschwindigkeiten über, so verliert der Impuls der Strahlung gegenüber dem des Elektrons immer mehr an Bedeutung, und im Grenzfalle erhält man den gewöhnlichen Doppler-Effekt an der Anfangsgeschwindigkeit. Die halbklassische Auffassung des Compton-Effektes geht also im Grenzfall $\frac{v_0}{c} >> \frac{\Lambda}{\lambda_0}$ in die gewöhnliche, wellenmäßige Auffassung des Doppler-Effektes über, während die Lichtquantenauffassung von Compton und Debye, wie wie wir in § 1 sahen, in die Schrödingersche Auffassung des Doppler-Effektes einmündet.

§ 3. Die dualistische Theorie.

Nicht nur in dem hier vorliegenden Problem, sondern kurz gesagt in allen Problemen, bei denen es sich um die Berechnung von emittierten oder absorbierten Frequenzen handelt (lichtelektrischer Effekt, Theorie der Spektren) ist die Lichtquantentheorie der halbklassischen an anschaulicher Einfachheit und an Eleganz der Ableitung unverkennbar überlegen. Man darf aber nicht übersehen, und darauf hat insbesondere Bohr hingewiesen, daß die Lichtquantentheorie als solche ohne die Wellentheorie in der Luft hängt, da alle ihre Aussagen nur durch Wellenlängenmessungen, d. h. durch Interferenzversuche geprüft werden können, welche letztere wiederum nur aus der Wellentheorie verständlich sind. Um diesem Dilemma zu entgehen, haben Bohr, Kramers und Slater[13]) versucht, die beiden heterogenen Gesichtspunkte, den der Lichtquanten und den der Wellen, in einer dualistischen Lichttheorie zu vereinigen. Nach dieser Theorie muß man gewissermaßen zwei Welten unterscheiden: in

der einen ist das Naturgeschehen wellenmäßig, in der anderen quantenmäßig bestimmt. Die Wellenwelt ist insofern die primäre und bevorzugte, als ihre Ereignisse diejenigen der Quantenwelt kausal nach sich ziehen. Allerdings ist sie unserer Beobachtung in keiner Weise zugänglich; weder die Wellen noch die dieselben erzeugenden geladenen Partikeln (Oszillatoren) sind irgendwie beobachtbar; sie sind „virtuell". Was wir beobachten und messen, sind vielmehr Elektronengeschwindigkeiten in der Quantenwelt, bzw. deren photoelektrische und photochemische Wirkungen, welche durch Wahrscheinlichkeitsgesetze mit den Feldstärken der „virtuellen" gekoppelt sind.

Nach dieser Theorie stellt sich der Vorgang der Streuung folgendermaßen dar. In der virtuellen Welt geht alles genau so vor sich, wie wir es in § 2 als „halbklassisch" beschrieben haben: die Primärwelle versetzt das virtuelle Elektron in erzwungene Schwingungen und zugleich in translatorische Bewegung, so daß die gestreute Frequenz durch Doppler-Effekt verstimmt ist. Die Tatsache, daß dabei nur die Geschwindigkeit (19) wirksam wird, wird von den Autoren nicht näher begründet; in ihrem Text [l. c.[13]), S. 799 bzw. S. 84] heißt es: „Daß in diesem Falle der virtuelle Oszillator sich mit einer Geschwindigkeit bewegt, die von jenen der bestrahlten Elektronen selbst verschieden ist, bedeutet einen Zug, der den klassischen Ideen besonders fremdartig gegenübersteht. Im Hinblick auf die grundsätzlichen Abweichungen von der klassischen raumzeitlichen Beschreibung, die der Idee von virtuellen Oszillatoren überhaupt innewohnen, scheint es bei dem jetzigen Stande der Theorie jedoch kaum gerechtfertigt, eine formale Deutung wie die betrachtete verurteilen zu wollen...."

Infolge dieses virtuellen Streuungsvorganges erhält nun das Elektron der reellen Welt eine Wahrscheinlichkeit, eine Impulsänderung zu erleiden, ähnlich derjenigen der Compton-Debyeschen Theorie. Diese Impulsänderung ist aber nicht etwa an die Ankunft eines „Lichtquants" geknüpft, d. h. nicht kausal-zeitlich mit der Emission eines Energiequantes in einem anderen Atom verbunden, sondern kann nach statistischen Gesetzen zu einem beliebigen Zeitpunkt erfolgen. Ebensowenig folgt auf den Stoß in der nach der Compton-Debyeschen Theorie gegebenen Streurichtung notwendig ein Absorptionsvorgang (Photoeffekt; vielmehr sind die mit der Streuung verbundenen lichtelektrischen Wirkungen und die Elektronenrückstöße zeitlich voneinander unabhängig. Mit anderen Worten: Energie- und Impulssatz sollen beim Einzelprozeß nicht mehr gelten; nur die allgemeine Beschaffenheit der Wahrscheinlichkeitsgesetze, welche die Beziehungen der beiden Welten regeln, soll die Gewähr dafür leisten, daß Energie und Impuls im Zeitmittel erhalten bleiben.

Die Frage, ob die lichtelektrischen Wirkungen und die Elektronenrückstöße miteinander kohärent (zeitlich in Phase) sind, kann nach einem Vorschlag von Bothe und Geiger[25]) experimentell entschieden werden, da sich sowohl die „$h\nu$-Stöße" wie die „e-Stöße" durch je einen Spitzenzähler registrieren lassen. Wegen der Unvollkommenheit der Versuchsanordnung kann man aber nicht auf jeden $h\nu$-Stoß einen e-Stoß erwarten; vielmehr sollte nach der Schätzung von Bothe und Geiger durchschnittlich auf jeden 10ten $h\nu$-Stoß ein e-Stoß registriert werden können, falls vollkommene Kohärenz zwischen $h\nu$- und e-Stößen besteht. Tatsächlich fanden Bothe und Geiger etwa auf jeden 11ten $h\nu$-Stoß einen e-Stoß. Die Wahrscheinlichkeit, daß diese Koinzidenzen zufällig sind, schätzen sie auf 10^{-5}. Dieses wichtige Ergebnis widerlegt die Auffassung von Bohr, Kramers und Slater und spricht durchaus zugunsten der extremen Lichtquantenauffassung.

§ 4. Die Prüfung der Theorien an den Nebelspuren der Rückstoßelektronen.

Wie ist eine experimentelle Entscheidung zwischen den in §§ 1 und 2 skizzierten Theorien möglich? In spektroskopischer Hinsicht unterscheiden sie sich gar nicht, da ja die halbklassische Theorie so eingerichtet ist, daß die Compton-Debyesche Frequenzänderung richtig herauskommt. Als einziges und wesentliches Kriterium bleibt die Rückstoßgeschwindigkeit. Nach der Lichtquantentheorie sind die Geschwindigkeitsvektoren über den ganzen vorderen Halbraum verteilt; zu jeder Richtung ϑ (11a) gehört eine ganz bestimmte Stoßenergie (6a) bzw. Reichweite; die nach vorn gestoßenen Elektronen sind schnell, die seitlich gestoßenen langsam (vgl. Fig. 2). Viel weniger eindeutig sind die Aussagen der halbklassischen Theorie; doch scheint die allgemeine Auffassung dahin zu gehen, daß nach Beendigung des Streuungsprozesses das Elektron die Geschwindigkeit (19) beibehält. Nach dieser Auffassung gibt es überhaupt keine kontinuierliche Geschwindigkeitsverteilung; alle an der Streuung beteiligten Elektronen haben die gleiche Geschwindigkeit (19) parallel der Primärstrahlrichtung. Doch läßt die halbklassische Theorie wohl auch andere Auffassungen zu, entsprechend den verschiedenen Vorstellungen über den Strahlungsdruck-Mechanismus.

Seitdem Bothe[15]) und Wilson[11]) in den

Nebelspurbildern die Rückstoßelektronen („fish-tracks" nach Wilson, „R-tracks" nach Compton) neben den Photoelektronen („long tracks" nach Wilson, „P-tracks" nach Compton) aufgefunden haben, sind deren Reichweiten von verschiedenen Seiten untersucht worden. Wilson selbst bemerkte, daß die „fish-tracks" alle praktisch in der Primärstrahlrichtung lagen und wurde offenbar dadurch zu der halbklassischen Auffassung geführt. Dagegen zeigten Compton und Hubbard[24]), daß auch die Lichtquantenvorstellung eine sehr starke Konzentration der Rückstoßrichtungen in der Primärstrahlrichtung erwarten läßt (vgl. II. Abschnitt, § 3) und daher in dieser Hinsicht sehr wohl mit Wilsons Ergebnissen verträglich ist. Eine experimentelle Entscheidung suchten Compton und Hubbard durch die Untersuchung der Reichweiten zu treffen. Nach der Lichtquantentheorie ist nämlich die maximale Rückstoßgeschwindigkeit ($\vartheta = 0$, $\Theta = \pi$) erheblich größer als (19), bei langen Wellen z. B. doppelt so groß (da nämlich für $\Theta = \pi$ der übertragene Impuls $= \frac{h\nu_0}{c} + \frac{h\nu}{c} \backsimeq 2\frac{h\nu_0}{c}$ ist, gegenüber $1\frac{h\nu_0}{c}$ in Wilsons Auffassung). Da die Reichweite mit der 4. Potenz der Anfangsgeschwindigkeit geht (Gesetz von Thomson und Whiddington), macht dies einen Faktor 16 für die theoretischen Reichweiten aus, so daß hier der Vergleich mit der Erfahrung leicht eine Entscheidung ermöglichen sollte. Nach Compton und Hubbard fällt die Entscheidung eindeutig zugunsten der Lichtquantentheorie aus: die nach ihr geschätzten Maximalreichweiten sind sogar noch um einen Faktor 3 bis 4 zu klein gegenüber den von Wilson angegebenen, was Compton aus der Unhomogenität der von Wilson benutzten Röntgenstrahlen erklärt; die aus (19) geschätzten Reichweiten dagegen sind um einen Faktor 50 zu klein.

Dieser Schluß wurde erhärtet durch eine neue Untersuchung der „R-Spuren" durch Compton und Simon[26]). Tabelle I zeigt in

Tabelle I.

KV	$\lambda_{eff.}$	beob.	ber. (6a)	ber. (19)
21	0,71 Å	0	0,06 mm	0,004 mm
34	0,44	0	0,3	0,02
52	0,29	2,5 mm	1,8	0,1
71	0,20	6	6	0,4
88	0,17	9	12	0,7
111	0,13	24	18	1,5

der ersten Spalte die Kilovoltzahl (KV) der Röntgenröhre, in der zweiten Spalte die daraus folgende effektive Wellenlänge ($\lambda_{eff.}$), in der dritten die beobachteten Maximalreichweiten, in der vierten und fünften Spalte die nach (6a) (Compton-Debye) bzw. (19) (Wilson) berechneten Maximalreichweiten. Wie man sieht, wird die Lichtquantentheorie vorzüglich bestätigt.

Compton und Simon konnten auch mit Sicherheit feststellen, daß seitwärts gerichtete R-Spuren vorhanden sind; diese haben, in Übereinstimmung mit der Theorie, immer eine Vorwärtskomponente und werden mit zunehmendem ϑ kürzer. Tabelle II zeigt die bei 111 KV in drei verschiedenen Winkelbereichen beobachteten mittleren Reichweiten im Vergleich mit den nach (6a) geschätzten; die Übereinstimmung ist auch hier sehr gut.

Tabelle II.

ϑ	beob.	ber.
0° bis 30°	9 mm	11 mm
30° „ 60°	4	4
60° „ 90°	0,9	0,3

Zu wesentlich gleichen Ergebnissen gelangten H. Ikeuti[27]), der mit Wolfram-K-Strahlung arbeitete ($\lambda_{eff.} = 0{,}21$ Å) und sowohl die Maximalreichweite als auch die Winkelabhängigkeit der Reichweiten in qualitativer Übereinstimmung mit Comptons Theorie fand, und D. Skobelzyn[28]), welcher die von γ-Strahlen ausgelösten R-Spuren unter Zuhilfenahme eines Magnetfeldes untersuchte und eine deutliche Abhängigkeit der Reichweite vom Winkel ϑ im Sinne der Comptonschen Formel feststellte. Die halbklassischen Theorien dürften trotz ihrer Biegsamkeit [Försterling[11]) weist auf den möglichen Einfluß der Bindung der streuenden Elektronen an das Atom hin] kaum imstande sein, diesen klaren Gesetzmäßigkeiten Rechnung zu tragen, welche die Lichtquantentheorie so einfach erklärt.

II. Abschnitt.

Die Intensitätsprobleme.

§ 1. Die Intensitätsverteilung der Streustrahlung.

Wie wir in der Einleitung bereits bemerkten, muß sich die Quantentheorie der Intensitätsverteilung beträchtlich mehr als die der Frequenzänderung an die klassische elektromagnetische Theorie anlehnen.

Die klassische Theorie der Streustrahlung von J. J. Thomson geht aus von den Hertzschen Formeln für die Ausstrahlung einer (durch die Primärwelle) beschleunigten Punktladung:

$$\mathfrak{E} = |\mathfrak{H}| = \frac{e\dot{v}}{c^2 r}\sin\gamma, \qquad (29)$$

wo $\dot{v}$ die Beschleunigung des Sekundärstrahlers, r den Abstand desselben vom Aufpunkt und γ den Winkel zwischen den Vektoren $\dot{v}$ und r bedeutet. Die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit fließende Energiemenge ist nach (29):

$$S = \frac{c}{4\pi}|\mathfrak{E}|^2 = \frac{e^2}{c^3}\cdot\frac{1}{4\pi r^2}\cdot\dot{v}^2\sin^2\gamma. \qquad (30)$$

Ist die Primärwelle unpolarisiert, so kann man so rechnen, als ob eine Schwingung $\dot{v}$ in der Streuungsebene (Ebene Primärstrahl — Sekundärstrahl) und eine dazu inkoharente, ebenso starke Schwingung in der Ebene senkrecht dazu stattfände. Für die erstere Komponente ist

$$\gamma = \frac{\pi}{2} - \Theta, \quad \sin^2\gamma = \cos^2\Theta,$$

für die letztere hingegen:

$$\gamma = \frac{\pi}{2}, \qquad \sin^2\gamma = 1.$$

Führt man in (30) das mittlere Amplitudenquadrat der beiden Komponenten ein, so erhält man als gesamten Energiefluß:

$$S = \frac{e^2}{c^3}\cdot\overline{\dot{v}^2}\cdot\frac{1+\cos^2\Theta}{4\pi r^2}\cdot\frac{1}{2}. \qquad (31)$$

Dies ist die bekannte Thomsonsche Formel.

Die Thomsonsche Theorie ist aber nur dann exakt richtig, wenn der Sekundärstrahler ruht. Hat derselbe dagegen eine Geschwindigkeit βc, so erhält Gl. (29) eine Art Dopplerkorrektion [vgl. etwa M. Abraham, Theorie der Elektrizität, II, 3. Aufl. 1914, S. 106, Gl. 77b]. Der Einfachheit halber betrachten wir nur den Fall, daß der Geschwindigkeitsvektor βc in die Richtung der Primärwelle fällt; dann ist die Schwingung $\dot{v}$ eine rein transversale [$\sphericalangle(v,\beta) = \pi/2$], und das Quadrat der Feldstärke drückt sich verhältnismäßig einfach aus [vgl. Abraham, l. c. S. 107, Gl. 79]. An Stelle von (31) erhält man:

$$S = \frac{e^2}{c^3}\frac{\overline{\dot{v}^2}}{4\pi r^2}\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^4} - \frac{(1-\beta^2)\cos^2\gamma}{(1-\beta\cos\Theta)^6}\right| \qquad (32)$$

$1-\beta\cos\Theta$ ist der bekannte Dopplerfaktor, da ja Θ in unserem Fall den Winkel zwischen der Geschwindigkeit βc und der Richtung des Sekundärstrahls (r) bedeutet; γ ist wie oben der Winkel zwischen r und $\dot{v}$. Im Grenzfall $\beta = 0$ kommt natürlich (32) auf (30) zurück. — Bei unpolarisierter Primärstrahlung hat man wieder eine Komponente mit $\gamma = \pi/2 - \Theta$, eine andere mit $\gamma = \pi/2$ in Rechnung zu ziehen; als resultierenden Energiefluß erhält man dann:

$$S = \frac{e^2}{c^3}\frac{\overline{\dot{v}^2}}{4\pi r^2}\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^4} - \frac{1}{2}\frac{(1-\beta^2)\sin^2\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^6}\right| \qquad (33)$$

Hier ist aber $\dot{v}$ noch von β abhängig. Nach dem Lorentzschen Kraftansatz ist:

$$\frac{m\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} = e\left|\mathfrak{E} + \frac{1}{c}[v\,\mathfrak{H}]\right| = e(1-\beta)\cdot\mathfrak{E}$$

$$\overline{\dot{v}^2} = \frac{e^2}{m^2}(1-\beta^2)(1-\beta)^2\cdot\overline{\mathfrak{E}^2} =$$

$$= \frac{4\pi}{c}\frac{e^2}{m^2}(1-\beta^2)(1-\beta)^2\cdot S_0,$$

wo S_0 die Primärintensität bedeutet. Setzt man dies in (33) ein, so kommt schließlich:

$$\frac{S}{S_0} = C(1-\beta^2)(1-\beta)^2\left|\frac{1}{(1-\beta\cos\Theta)^4} - \frac{1}{2}\frac{(1-\beta^2)\sin^2\Theta}{(1-\beta\cos\Theta)^6}\right| = C\frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\Theta)^6}\left|(1+\beta^2)\frac{1+\cos^2\Theta}{2} - 2\beta\cos\Theta\right| \qquad (34)$$

mit der Abkürzung:

$$C = \frac{e^4}{c^4 m^2 r^2}. \qquad (35)$$

Gl. (34) läßt sich leicht mittels einer Lorentztransformation aus (31) ableiten [wegen der Rechnung vgl. etwa Y. H. Woo[29]].

Der Ausdruck S/S_0 (34) mißt das Verhältnis der Energien, die man mit einem absorbierenden Schirm im gleichen Zeitintervall aus dem Primär- bzw. Sekundärstrahl herausholen kann. Dieses Verhältnis ist aber keineswegs identisch mit dem Gesamtbruchteil der Energiemenge S_0, welcher in den betreffenden Winkelbereich gestreut wird, da ja die Ankunft der Sekundärstrahlung auf dem Schirm sich wegen des Doppler-Effektes über ein längeres oder kürzeres Zeitintervall erstreckt als die der Primärstrahlung. Denken wir uns etwa den Primärstrahl als einen abgeschnittenen Wellenzug von der Länge l_0, so hat der in die Richtung Θ gestreute Wellenzug die Länge

$$l = l_0\cdot\frac{1-\beta\cos\Theta}{1-\beta}.$$

Der insgesamt in die Richtung Θ gestreute Bruchteil der Primärintensität ist demnach

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\int S\,dt}{\int S_0\,dt} = \frac{S\cdot l}{S_0\cdot l_0},$$

also mit (34):

$$\frac{I}{I_0} = C \cdot \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)}{(1-\beta\cos\Theta)^5} \left| (1+\beta^2)\frac{1+\cos^2\Theta}{2} - 2\beta\cos\Theta \right|. \tag{36}$$

Für $\beta = 0$ wird:

$$\frac{I}{I_0} = C\frac{1+\cos^2\Theta}{2}, \tag{37}$$

wie auch unmittelbar aus (31) zu ersehen ist.

Wir mußten an diese bekannten Resultate der Wellentheorie erinnern, um im Folgenden bei der Anwendung des Korrespondenzprinzips auf ihnen aufbauen zu können. Wir gehen jetzt dazu über, die verschiedenen Auslegungen des Korrespondenzprinzips einzeln zu besprechen.

a) P. Debye[6]) stellt folgende Überlegung an. Im Grenzfalle langer Wellen muß die Intensitätsverteilung der Streustrahlung in die Thomsonsche (37) übergehen. Nach der Lichtquantenhypothese setzt sich aber der Primärstrahl I_0 aus $Z_0 = I_0/h\nu_0$ Korpuskeln von der Energie $h\nu_0$ zusammen, entsprechend der Sekundärstrahl I aus $Z = I/h\nu$ Korpuskeln der Energie $h\nu$. Die Wahrscheinlichkeit, daß eines der Primärelektronen in den betreffenden Sekundärstrahl (durch die betreffende Flächeneinheit) gestreut wird, ist hiernach

$$W = \frac{Z}{Z_0} = \frac{I}{I_0}\cdot\frac{\nu_0}{\nu}.$$

Im Grenzfalle langer Wellen soll nun I/I_0 durch den Ausdruck (37) gegeben sein, während ν praktisch gleich ν_0 wird; also:

$$W = C\frac{1+\cos^2\Theta}{2} \text{ für } \lambda_0 >> \Lambda.$$

Debye übernimmt nun diesen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit auch für kurze Wellen. Danach wird die sekundäre Intensität:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\nu}{\nu_0}\cdot W = \frac{\nu}{\nu_0} C\cdot\frac{1+\cos^2\Theta}{2} = \frac{C\cdot\dfrac{1+\cos^2\Theta}{2}}{1+\dfrac{\Lambda}{\lambda_0}(1-\cos\Theta)}. \tag{38a}$$

Während der Thomsonsche Energiefluß (37) nur von $\cos^2\Theta$ abhängt, also um die Ebene $\Theta = \pi/2$ symmetrisch ist, wird der Ausdruck (38a) durch den Faktor ν/ν_0 unsymmetrisch: es wird weniger Energie rückwärts $\left(\Theta > \frac{\pi}{2}\right)$ als vorwärts $\left(\Theta < \frac{\pi}{2}\right)$ gestreut. Zwar ist die Zahl $Z = Z_0 W$ der vorwärts und rückwärts gestreuten Quanten die gleiche, aber die Energieverteilung ist infolge der Comptonschen Frequenzänderung unsymmetrisch. Beachtet man noch, daß der Ausdruck (38a) immer kleiner als der klassische Wert (37) ist, so erkennt man, daß die Theorie von Debye qualitativ mit den Erfahrungen an γ-Strahlen (vgl. die Einleitung) im Einklang ist; auf die quantitative Prüfung kommen wir später zurück.

b) Gegen Debyes Ansatz (38a) kann man einwenden, daß er der Bewegung des Sekundärstrahlers nicht Rechnung trägt, indem er von Formel (37) statt von Formel (36) ausgeht. Hier geht Compton[5]) weiter, indem er folgendermaßen argumentiert: Die Frequenzänderung berechnet sich klassisch richtig als Doppler-Effekt, wenn man den Sekundärstrahler mit der Geschwindigkeit (19) in der Primärstrahlrichtung bewegt denkt; folglich wird sich auch die Intensitätsverteilung mittels des gleichen Ersatzmodells richtig berechnen lassen. Compton selbst geht aber bei der Ausführung dieser Vorschrift nicht völlig konsequent vor [vgl. unter c)]. Försterling[11]) und Halpern[12]) andererseits gehen zwar, entsprechend ihrer halbklassischen Auffassung, von der Abrahamschen Formel (33) aus, in welcher sie für β den Wert (19) einsetzen, versäumen aber die Wellenlängenabhängigkeit von $\overline{\dot{v}^2}$ zu diskutieren. Y. H. Woo[29]) hat die Comptonsche Vorschrift in ihre letzten Konsequenzen verfolgt, indem er (19) in die Formel (36) einsetzte:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{C\left(1+2\dfrac{\Lambda}{\lambda_0}\right)}{\left[1+\dfrac{\Lambda}{\lambda_0}(1-\cos\Theta)\right]^5} \left| \frac{1+\cos^2\Theta}{2} + \frac{\Lambda}{\lambda_0}\left(1+\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)(1-\cos\Theta)^2 \right|. \tag{38b}$$

Dieses Verfahren besitzt den Vorzug, daß man es ohne weiteres auf den Fall des anfangs bewegten Elektrons (vgl. § 1, b) übertragen kann. Zu diesem Zwecke braucht man statt (19) nur diejenige Geschwindigkeit in (36) einzuführen, deren Doppler-Effekt mit dem Compton-Effekt (5b) übereinstimmt [vgl. I, § 2, letzter Absatz, S. 445]; man wird dann in natürlicher Erweiterung der Comptonschen Korrespondenzvorschrift die durch den betreffenden Doppler-Effekt verursachte Unsymmetrie der Intensitätsverteilung mit der des Compton-Effektes identifizieren. In der Grenze $v_0/c >> \Lambda/\lambda_0$, wo die Comptonsche völlig in die Doppler-

sche Frequenzänderung übergeht, vollzieht sich dann auch der Übergang der Intensitätsverteilungen in naturgemäßer Weise.

In (38b) ist wie in (38a) die Rückwärtsstreuung ($\Theta > \pi/2$) herabgedrückt, doch ist die Vorwärtsstreuung ($\Theta < \pi/2$) verstärkt. Beispielsweise ist für $\Theta = 0$:

$$\frac{I}{I_0} = C\left(1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right) > C.$$

c) Compton selbst leitet die Formel (38b) mittels einer Lorentztransformation unter teilweiser Benutzung von Lichtquantenvorstellungen ab, identifiziert dann aber die Konstante C nicht mit der Thomsonschen Konstanten (35), sondern bestimmt den Absolutwert der Intensität durch die zusätzliche Forderung, daß die in der Primärrichtung ($\Theta = 0$) gestreute Intensität den klassischen Wert C (35) haben solle:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{C}{\left[1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}(1 - \cos\Theta)\right]^5}\left[\frac{1 + \cos^2\Theta}{2} + \frac{\Lambda}{\lambda_0}\left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)(1 - \cos\Theta)^2\right]. \qquad (38c)$$

Compton begründet diese Art der Normierung durch den Hinweis darauf, daß für $\Theta = 0$ die Streuung ohne Frequenzänderung, d. h. „klassisch" verläuft, also auch mit der klassischen Intensität erfolgen müsse. (38b) und (38c) unterscheiden sich um einen Faktor $\left(1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)$. — Bei einer Verallgemeinerung der Formel (38c) für anfangs bewegte Elektronen muß die Comptonsche Normierungsvorschrift erweitert werden.

Die Verschiedenheit der in a), b), c) eingenommenen Standpunkte, denen man noch weitere hinzufügen könnte, erläutert vortrefflich den qualitativen Charakter des Korrespondenzprinzips, das im allgemeinen keine scharfe Voraussage der Intensitäten gestattet. Der Standpunkt b) besticht durch seine Einfachheit. Die von Compton vorgenommene Normierung c) wächst nicht organisch aus der Theorie heraus, sie wirkt wie ein Fremdkörper, und vermutlich hat sich Compton auch weniger aus theoretischen als aus experimentellen Gründen zu ihr entschlossen. Tatsächlich spricht der experimentelle Befund ziemlich eindeutig zugunsten der Comptonschen Formel (38c).

Compton[30]) selbst hat die Streustrahlung der γ-Strahlen des RaC, die sich durch große Härte auszeichnen, eingehend hinsichtlich ihrer Intensitätsverteilung untersucht. Er sonderte durch Filterung den härtesten Anteil der γ-Strahlen ab; derselbe besitzt nach L. Meitner (Erg. d. exakten Naturwissenschaften III, 1924, S. 172) die Wellenlänge $\lambda_0 = 0{,}0204$ Å. Für das charakteristische Verhältnis Λ/λ_0 erhält man damit den Wert 1,19. (Compton selbst rechnet mit $\lambda_0 = 0{,}022$ Å, $\Lambda/\lambda_0 = 1{,}10$.) Fig. 3 stellt die Intensitätsverteilung nach den drei Theorien a), b), c) [bzw. Gl. (38a), (38b), (38c)] dar, außerdem die Thomsonsche Verteilung (37). Einheit der Ordinate ist der Thomsonsche Wert der in der Primärrichtung gestreuten Intensität (C). Die experimentellen Punkte (○), die natürlich durch Vergleich der Ionisationswirkung von Primär- und Sekundärstrahlung gewonnen sind, sind insofern etwas unsicher, als das Verhältnis der Ionisation zur wahren Energie möglicherweise wellenlängenabhängig ist, also mit dem Streuwinkel variiert; doch dürfte dieser Effekt die Größenordnung kaum erheblich fälschen. Wie man sieht, schließen sich die experimentellen Punkte an die Kurve c) befriedigend an; die Kurven a) und b) liegen viel zu hoch. Auch die älteren Messungsergebnisse von Kohlrausch[31]) fügen sich dem allgemeinen Gang nach gut in die Comptonschen Punkte bzw. Kurve c) ein.

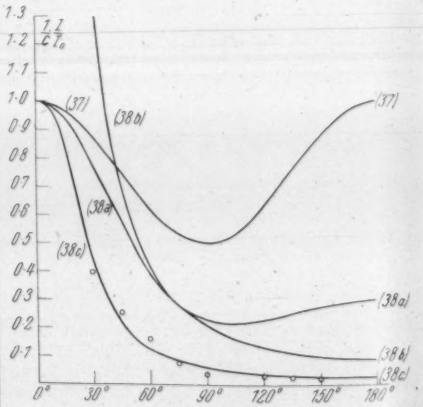


Fig. 3.

Eine eng an die Intensitätsfrage anschließende Frage ist die nach der Polarisation der Streustrahlung. Nach der Thomsonschen Theorie ist die Streustrahlung in den Richtungen $\Theta = 0$ und $\Theta = \pi$ unpolarisiert, in der Richtung $\Theta = \frac{\pi}{2}$ aber linear polarisiert. Bei der Streuung an

einem bewegten Elektron ist der Winkel der Linearpolarisation gegeben durch $\Theta_1 = \frac{\pi}{2}$, wo Θ_1 mit Θ durch die bekannte Aberrationsformel verknüpft ist:

$$\cos\Theta_1 = \frac{\cos\Theta - \beta}{1 - \beta\cos\Theta};$$

folglich:

$$\cos\Theta = \beta, \quad \Theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\beta.$$

Nach der Debyeschen Auslegung des Korrespondenzprinzips (a) würde man also Linearpolarisation für $\Theta = \frac{\pi}{2}$ erwarten, nach den Auslegungen (b), (c) dagegen für eine etwas nach vorn verschobene Richtung

$$\Theta = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{\Delta}{\Delta + \lambda_0}. \tag{39}$$

Experimentell wurde diese Frage von Jauncey und Stauß[32]) untersucht. Röntgenstrahlen von der effektiven Wellenlänge 0,25 Å wurden zweimal unter ca. 90° an Paraffin gestreut. Wäre die Sekundärstrahlung vollkommen linear polarisiert, so sollte in der Richtung ihres elektrischen Vektors überhaupt keine Tertiärstrahlung emittiert werden (Barkla). Jauncey und Stauß fanden nun ein Minimum der Tertiärstrahlung für $\Theta = 87^0\,30'$, während aus (39) für $\lambda_0 = 0{,}25$ Å $\Theta = 84^0\,47'$ folgt. Bei der effektiven Wellenlänge $\lambda_0 = 0{,}54$ Å. erhielten sie keine merkliche Abweichung von 90°, während (39) $\Theta = 87^0\,30'$ ergibt. Das Minimum war aber infolge von Störungen nicht Null und die Ablesung deshalb nicht sehr genau. Die beobachtete Abweichung von 90° liegt jedenfalls im Sinne der Gl. (39); daß ihr Betrag unter dem theoretischen bleibt, kann vielleicht aus dem Vorhandensein der unverschobenen Linie erklärt werden[33]). Jauncey[34]) leitete Gl. (39) aus einem Stoßgesetz zwischen Elektron und Lichtquant ab [vgl. III. Abschnitt]; Bothe[33]) wies als erster darauf hin, daß es sich hier um einen einfachen, „dem Dopplereffekt parallel gehenden Aberrationseffekt" handelt.

§ 2. Der Streuungs- und der Absorptionskoeffizient.

Kennt man die Intensitätsverteilung der Streustrahlung, so gewinnt man durch Integration über alle Richtungen sofort das Verhältnis der gesamten Sekundärintensität zur Primärintensität, den „Streuungskoeffizienten":

$$\sigma_z = N \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{I}{I_0} \sin\Theta\, d\Theta. \tag{40}$$

(N = Zahl der Elektronen pro Volumeinheit.)

In der Lichtquantensprache bedeutet σ_z natürlich einen Mittelwert, nämlich denjenigen Bruchteil der Primärintensität, welcher im Mittel auf der Längeneinheit in Streustrahlung verwandelt wird. Dieser Bruchteil stellt aber nicht den gesamten Energieverlust der Primärstrahlung dar, da ja ein weiterer Energiebetrag als Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes verloren geht, der sich nachher in der kinetischen Energie der gestoßenen Elektronen wiederfindet.

Vom Standpunkt der Lichtquantenhypothese aus können wir aber auch den Koeffizienten der Gesamtschwächung („Absorptionskoeffizient durch Streuung" zur Unterscheidung vom „wahren Absorptionskoeffizienten" durch Photoeffekt) leicht ermitteln; er ist das Verhältnis der Zahl der (pro Längeneinheit) gestreuten Quanten zur Zahl der primären Quanten. Letztere ist gleich $I_0/h\nu_0$, erstere gleich

$$N \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{I}{h\nu} \sin\Theta\, d\Theta.$$

Der Gesamtschwächungskoeffizient ist demnach:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= N \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{I}{I_0}\frac{\nu_0}{\nu} \cdot \sin\Theta\, d\Theta \\ &= N \cdot 2\pi r^2 \int_0^\pi \frac{I}{I_0}\left[1 + \frac{\Delta}{\lambda_0}(1 - \cos\Theta)\right] \sin\Theta\, d\Theta. \end{aligned}\right| \tag{41}$$

σ unterscheidet sich von dem Streuungskoeffizienten σ_z durch das Auftreten des Faktors ν_0/ν im Integranden.

Die aus verschiedenen Korrespondenzbetrachtungen hervorgegangenen Intensitätsformeln liefern natürlich auch wieder verschiedene Werte für σ_z bzw. σ. Wir diskutieren die Standpunkte a), b), c) [vgl. § 1] der Reihe nach. Den klassischen Wert des Streuungskoeffizienten bezeichnen wir mit σ_0 [vgl. (35)]:

$$\sigma_0 = N \cdot 2\pi r^2 \cdot \frac{4}{3} C = \frac{8\pi}{3} \frac{N e^4}{c^4 m^2}. \tag{42}$$

a) Die Formel von Debye, Gl. (38a), liefert [vgl. Debye, l. c.[6]), Gl. (8)]:

$$\sigma_s = \sigma_0 \cdot \frac{3}{4}\frac{\lambda_0^3}{\Lambda^3}\left|\left(1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0} + 2\frac{\Lambda^2}{\lambda_0^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}\right) - \frac{\Lambda}{\lambda_0}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)\right|,$$

$$= \sigma_0\left(1 - \frac{7}{16}\frac{\Lambda}{\lambda_0} + \cdots\right) \quad \text{für } \lambda_0 >> \Lambda$$

$$= \sigma_0 \cdot \frac{3}{2}\frac{\lambda_0}{\Lambda}\left(\ln\frac{\Lambda}{\lambda_0} - \frac{3}{4} + \cdots\right) \quad \text{für } \lambda_0 << \Lambda; \qquad (40a)$$

$$\sigma = \sigma_0. \qquad (41a)$$

b) Die Formel von Woo, Gl. (38b) ergibt (vgl. Woo, l. c.[29]), Gl. (20), (21)]:

$$\sigma_s = \sigma_0 \cdot \frac{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}}{1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0}} \qquad (40b)$$

$$\sigma = \sigma_0. \qquad (41b)$$

c) Die Formel von Compton endlich unterscheidet sich von derjenigen von Woo um den Faktor $(1 + 2\Lambda/\lambda_0)^{-1}$ [vgl. Compton, l. c.[5]), Gl. (28), (29)]:

$$\sigma_s = \sigma_0 \cdot \frac{1 + \frac{\Lambda}{\lambda_0}}{\left(1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0}\right)^2} \qquad (40c)$$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot \frac{1}{1 + 2\frac{\Lambda}{\lambda_0}}. \qquad (41c)$$

In allen drei Theorien ist $\sigma_s < \sigma_0$ in Übereinstimmung mit der Erfahrung; für $\lambda_0 = 0$ ergibt (40a) und (40c) $\sigma_s = 0$, (40b) dagegen $\sigma_s = {}^1/_2\sigma_0$. σ hat nach den Theorien a) und b) den klassischen Wert, während die Comptonsche Formel (41c) auch σ für kleine λ_0 gegen Null abnehmen läßt. Allerdings ist zu beachten, daß der Wert $\sigma = \sigma_0$ (41b) für die halbklassische Vorstellung (Försterling, Halpern) nicht verbindlich ist, da nach dieser die Arbeitsleistung des Strahlungsdruckes in (41) nicht richtig berücksichtigt ist.

Die experimentelle Entscheidung zwischen den Theorien a), b), c) fällt wie in § 1 ziemlich eindeutig zugunsten von c) aus. Was zunächst den Schwächungskoeffizienten σ anlangt, so dürfte seine Abnahme bei kurzen Wellenlängen feststehen. Man bestimmt σ für Röntgenstrahlen bekanntlich aus dem Gesamtabsorptionskoeffizienten durch Subtraktion des „wahren" (photoelektrischen) Absorptionskoeffizienten, dessen Gesetz (proportional λ^3) man von längeren Wellen her extrapoliert. Hewlett[35]) und Richtmyer[36]) berechnen aus ihren Messungen im Wellenlängenbereich von etwa 0,1 bis 1 Å σ-Werte, die deutlich unter dem klassischen Werte liegen, untersuchen aber deren Wellenlängenabhängigkeit nicht im einzelnen. Compton[5]) berechnet aus den Hewlettschen Messungen neue σ-Werte, die eine Abnahme mit der Wellenlänge zeigen und unter 0,5 Å. sehr gut mit seiner Formel (41c) übereinstimmen; wir reproduzieren in Fig. 4 seine graphische Darstellung [l. c.[5]), S. 498]. Die Überschreitung von σ_0 bei längeren Wellen ($\lambda_0 > 0{,}5$ Å.) deutet Compton als Interferenzeffekt im Atom; bei Wellenlängen, die von der Größenordnung der Elektronenabstände im Atom sind, sind ja derartige Schwankungen der Streustrahlung eine bekannte Erscheinung. Bei 0,02 Å. hat Compton noch den Absorptionskoeffizienten der

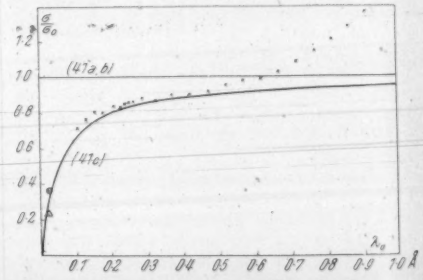


Fig. 4.

γ-Strahlen von *RaC* in Kohle (⊙) eingetragen, der wegen der Kleinheit der wahren Absorption bei dieser Wellenlänge mit σ identifiziert werden kann; wir fügen außerdem noch den von Kohlrausch[36]) ermittelten Wert derselben Konstanten (△) hinzu; auch hier ist die Übereinstimmung mit (41c) gut. Obwohl die Beweiskraft der Röntgenstrahlwerte (wegen der Interferenzanomalie) keine sehr große ist, sprechen doch die γ-Strahlwerte durchaus eindeutig zugunsten von (41c).

Auch Comptons Formel (40c) für den Streuungskoeffizienten σ_s erweist sich bei γ-Strahlen als zuverlässig. Aus Ishinos Messungen[38]) der gesamten Streustrahlung der γ-Strahlen von *RaC* ergibt sich σ_s/σ_0 zu rund 0,23, während (40c) mit $\Lambda/\lambda_0 = 1{,}19$ $\sigma_s/\sigma_0 = 0{,}19$ liefert. Dagegen berechnet man aus (40a) $\sigma_s/\sigma_0 = 0{,}69$, aus (40b) $\sigma_s/\sigma_0 = 0{,}65$.

Compton und Simon haben in ihrer bereits früher zitierten Arbeit[26]) die obigen Formeln noch einer ganz neuartigen Prüfung unterzogen. Sie zählten in ihren Wilson-Aufnahmen die Spuren sowohl der P-(Photo-) als der R-(Rückstoß-)Elektronen ab und bestimmten das Verhältnis

$$\frac{\text{Gesamtzahl der } R\text{-Spuren}}{\text{Gesamtzahl der } P\text{-Spuren}} = \frac{N_R}{N_P}.$$

Dieses Verhältnis muß offenbar gleich sein dem Verhältnis des Absorptionskoeffizienten durch Streuung (σ) zum wahren Absorptionskoeffizienten (τ)[21]); denn jede R-Spur bedeutet ja den Verlust eines Quants $h\nu_0$ durch Streuung, jede P-Spur den Verlust eines gleichen Quants $h\nu_0$ durch lichtelektrischen Effekt:

$$\frac{N_R}{N_P} = \frac{\sigma}{\tau}.$$

Compton und Simon berechnen nun den Quotienten σ/τ in Abhängigkeit von der Wellenlänge, indem sie σ durch (41c), τ durch eine empirische Formel von Richtmyer[36]) ausdrücken, und vergleichen ihn mit N_R/N_P (vgl. Tabelle III). Die Übereinstimmung ist, insbesondere bezüglich der Wellenlängenabhängigkeit, recht gut; doch scheint durchweg N_R/N_P etwas kleiner als σ/τ zu bleiben. Sollte sich das letztere Resultat bestätigen, so würde das bedeuten, daß nicht bei jedem Streuungsprozeß ein Rückstoßelektron frei wird; man könnte dies mit der Existenz der unverschobenen Linie (Impulsübertragung auf ein Atom, vgl. I. Abschnitt, § 1a) in Zusammenhang bringen. Wir haben in der Tabelle noch die Werte σ_0/τ, entsprechend (41a), (41b), hinzugefügt. Sie sind, wegen der relativ großen Wellenlänge, nur wenig größer als σ/τ.

Tabelle III.

KV	$\lambda_{\text{eff.}}$	N_R/N_P	σ/τ	σ_0/τ
21	0,71 Å	0,10	0,27	0,29
34	0,44	0,9	1,2	1,3
52	0,29	2,7	3,8	4,4
74	0,20	9	10	12
88	0,17	17	17	22
111	0,13	(72)	32	44

§ 3. Die Geschwindigkeitsverteilung der Rückstoßelektronen.

Im I. Abschnitt behandelten wir die Reichweite der nach verschiedenen Richtungen ϑ gestoßenen R-Elektronen als ein energetisches Problem; hier stellen wir die Frage nach der Anzahl der in einen Richtungsbereich $d\vartheta$ gehenden Elektronen, eine Frage, die aufs engste mit der Frage der Intensitätsverteilung der Streustrahlung zusammenhängt.

Die Zahl der Lichtquanten, die auf der Einheit der Weges in den Winkelbereich $d\Theta$ gestreut werden, ist [vgl. § 2]:

$$dZ = N \cdot 2\pi r^2 \cdot \frac{I}{h\nu} \sin\Theta d\Theta. \tag{43}$$

Gleich groß ist die Anzahl der in den Bereich $d\vartheta$ gestoßenen Elektronen, wenn Θ und ϑ, $d\Theta$ und $d\vartheta$, durch die Relation (11a), S. 440, verknüpft gedacht werden. Die Ausrechnung [vgl. Compton und Hubbard, l. c.[21])] liefert bei Benutzung von (38c) und (42)

$$dZ = \sigma_0 \frac{I_0}{h\nu_0} \cdot \frac{3}{4} \frac{a\,(a^2 \operatorname{tang}^4\vartheta + b^2)}{(a \operatorname{tang}^2\vartheta + b)^4} \cdot \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta}{\cos^3\vartheta}, \tag{44}$$

wo

$$a = \left(1 + \frac{\Delta}{\lambda_0}\right)^2 \qquad b = \left(1 + 2\frac{\Delta}{\lambda_0}\right).$$

Man kann andererseits die Frage stellen, wieviel Elektronen eine bestimmte Stoßenergie T bis $T + dT$ bekommen; da T und ϑ eindeutig voneinander abhängen, kommt dies natürlich nicht auf etwas Neues hinaus. Die gewünschte Anzahl ist wiederum gleich dZ, wenn man in (43) Θ und $d\Theta$ bzw. in (44) ϑ und $d\vartheta$ nach Formel (6a), S. 440, durch T und dT ausdrückt. Man erhält [vgl. Compton und Hubbard, l. c.[21])]:

$$dZ = \sigma_0 \cdot \frac{I_0}{h\nu_0} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\lambda_0}{\lambda_0 + 2\Delta} \left[1 - 2\frac{T}{T_{\max}} + 2\frac{T^2}{T_{\max}^2}\right] \frac{dT}{T_{\max}}, \tag{45}$$

wo

$$T_{\max} = h\nu_0 \cdot \frac{2\Delta}{\lambda_0 + 2\Delta}$$

die maximale Stoßenergie ($\vartheta = 0$) bedeutet. Integriert man in (43) zwischen $\Theta = 0$ und π, bzw. in (44) zwischen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, bzw. in (45) zwischen $T = 0$ und $T = T_{\max}$, so kommt:

$$\int dZ = \frac{\sigma_0}{1 + 2\Delta/\lambda_0} \cdot \frac{I_0}{h\nu_0} = \sigma \cdot \frac{I_0}{h\nu_0}. \tag{46}$$

In der Tat muß ja die Gesamtzahl der Elektronen gleich der Gesamtzahl der Streuungsprozesse herauskommen. — Es versteht sich von selbst, daß man entsprechende Formeln auf Grund der Intensitätsverteilungen (38a) und (38b) ableiten kann; doch wollen wir darauf nicht mehr eingehen.

Bei der experimentellen Prüfung der Geschwindigkeitsverteilung stützten sich Compton und Simon[26]) auf Formel (45). Ihre Methode

zur Prüfung der Gesamtzahl (46) haben wir schon in § 2 besprochen; es handelt sich jetzt nur noch um die relative Häufigkeit verschiedener Reichweiten. Da die Reichweiten (R) quadratisch in T sind (Whiddingtons Gesetz), kann man setzen:

$$T/T_{\max} = \sqrt{R/R_{\max}}$$

($R_{\max}$ = maximale Reichweite der R-Spuren). Nach (45) ist also[24]

$$\frac{dZ}{dR} \text{ proportional } \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \left[1 - 2\sqrt{\frac{R}{R_{\max}}} + 2\frac{R}{R_{\max}}\right]. \quad (47)$$

Tatsächlich finden Compton und Simon eine statistische Verteilung der Reichweiten, die der Formel (47) völlig entspricht. In Tabelle IV sind die nach (47) berechneten Spurenzahlen für verschiedene Reichweiten mit den beobachteten verglichen; die Übereinstimmung läßt nichts zu wünschen übrig; insbesondere ist auch die von (47) geforderte Unabhängigkeit der Prozentzahlen von der Wellenlänge unverkennbar. Daß dann auch die Verteilung der Spuren auf die verschiedenen Richtungen mit (44) übereinstimmt [vgl. Tabelle V für 111 KV], versteht sich nach dem Vorangehenden von selbst.

Tabelle IV.

$R/R_{\max}$	Anzahl von 100					
	52 KV	74 KV	88 KV	111 KV	Mittel	ber.
0 bis 0,2	44	66	60	54	56	53
0,2 „ 0,4	34	20	26	32	28	22
0,4 „ 0,6	19	8	4	8	10	14
0,6 „ 0,8	0	3	5	3	3	8
0,8 „ 1,0	3	3	5	3	3	3

Tabelle V.

ϑ	Anzahl von 100	
	beob.	ber.
0° bis 30°	34	28
30° „ 60°	39	50
60° „ 90°	27	22
90° „ 180°	0	0

Es hat demnach den Anschein, daß die Comptonsche Intensitätsformel (38a) in allen ihren Folgerungen mit den bisherigen Erfahrungstatsachen im Einklang ist.

Literaturverzeichnis.

1) A. S. Eve, Phil. Mag. **8**, 669, 1904. Weitere Literatur bei J. A. Gray, Phil. Mag. **26**, 611, 1913 und bei A. H. Compton[4]).
2) D. C. H. Florance, Phil. Mag. **20**, 921, 1910.
3) C. A. Sadler u. P. Mesham, Phil. Mag. **24**, 138, 1912.
4) A. H. Compton, Bull. Nat. Research Council, **4**, 1922, Nr. 20, S. 15ff.
5) A. H. Compton, Phys. Rev. **21**, 207 und 483, 1923.
6) P. Debye, Physik. Zeitschr. **24**, 161, 1923.
7) P. A. Ross, Proc. Nat. Acad. **9**, 246, 1923.
8) A. H. Compton, Phil. Mag. **46**, 897, 1923.
9) A. H. Compton u. Y. H. Woo, Proc. Nat. Acad. **10**, 370, 1924; Y. H. Woo, ebenda **11**, 123, 1925.
10) Zahlreiche Veröffentlichungen von W. Duane und seinen Mitarbeitern in den Proc. Nat. Acad. **10**, 1924 und **11**, 1925.
11) K. Försterling, Physik. Zeitschr. **25**, 313, 1924.
12) O. Halpern, Zeitschr. f. Phys. **30**, 153, 1924.
13) N. Bohr, H. A. Kramers u. J. C. Slater, Phil. Mag. **47**, 785, 1924 und Zeitschr. f. Phys. **24**, 69, 1924.
14) C. T. R. Wilson, Proc. Roy. Soc. **104**, 1, 1923, insbesondere S. 15, 16.
15) W. Bothe, Zeitschr. f. Phys. **16**, 319 u. **20**, 237, 1923.
16) J. P. V. Madsen, Phil. Mag. **17**, 423, 1909.
17) A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, 3. Aufl. 1922, S. 653.
18) A. H. Compton, Phys. Rev. **24**, 168, 1924.
19) L. de Broglie, Annales de Physique **3**, 22, 1925, S. 102.
20) E. Schrödinger, Physik. Zeitschr. **23**, 301, 1922.
21) W. Lenz, Zeitschr. f. Phys. **25**, 299, 1924, S. 310.
22) Bauer, C. R. **177**, 1211, 1923.
23) Vgl. auch J. Frenkel, Zeitschr. f. Phys. **32**, 27, 1925.
24) A. H. Compton u. J. C. Hubbard, Phys. Rev. **23**, 439, 1924.
25) W. Bothe u. H. Geiger, Zeitschr. f. Phys. **26**, 44, 1924 und Naturwissenschaften **13**, 440, 1925.
26) A. H. Compton u. A. W. Simon, Phys. Rev. **25**, 306, 1925.
27) H. Ikeuti, C. R. **180**, 27. April 1925.
28) D. Skobelzyn, Zeitschr. f. Phys. **28**, 278, 1924.
29) Y. H. Woo, Phys. Rev. **25**, 444, 1925.
30) A. H. Compton, Phil. Mag. **41**, 749, 1921.
31) K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber. **128**, 855, 1919 u. Physik. Zeitschr. **21**, 193, 1920.
32) G. E. M. Jauncey u. H. E. Stauß, Phys. Rev. **23**, 762, 1924.
33) W. Bothe, Zeitschr. f. Phys. **31**, 24, 1925.
34) G. E. M. Jauncey, Phys. Rev. **23**, 313, 1924.
35) C. W. Hewlett, Phys. Rev. **17**, 284, 1921.
36) F. K. Richtmyer, Phys. Rev. **18**, 13, 1921.
37) K. W. F. Kohlrausch, Wiener Ber. **126**, 887, 1917.
38) M. Ishino, Phil. Mag. **33**, 140, 1917.

(Abgeschlossen 17. Mai 1925.)

(Eingegangen 22. Mai 1925.)

BESPRECHUNGEN.

W. Heiskanen, Untersuchungen über Schwerkraft und Isostasie. (Veröffentlichungen des finnischen geodätischen Institutes Nr 4.) 8°. 96 Seiten. Mit 1 Karte. Helsinki, Buchdruckerei A. G. Sana. 1924.

Man spricht in der Geophysik vielfach schlechtweg von einer obersten Erdkruste und versteht darunter eine oberste feste Schicht, an deren unteren Grenze eine Diskontinuität der physikalischen Eigenschaften, eine Änderung der Zusammensetzung, Dichte, Elastizität des Aggregatzustandes usw. eintreten soll. Direkte Beobachtungstatsachen sowohl wie daraus abgeleitete theoretische Vorstellungen aus verschiedenen Gebieten der Geophysik machen eine solche Schichtung wahrscheinlich. So hat es den Anschein, daß eine wesentliche Abkühlung der Erde seit ihrer Bildung nur wenige hundert Kilometer abwärts reicht, schon in 70 km kaum noch vorhanden ist. Der Schmelzpunkt der Gesteine wird darum mindestens in etwa 200 km Tiefe, wenn nicht schon in wesentlich geringerer Tiefe erreicht. Die seismischen Beobachtungen lassen eine Diskontinuität schon in etwa 50 km vermuten. Ein sprunghaftes Anwachsen der Geschwindigkeit der Erdbebenwellen um fast 50 Proz. ist dort unverkennbar. In dieser Tiefe liegt auch der Herd der Erdbeben, soweit sich dieser bisher erkennen läßt.

Die Bearbeitung der Lotstörungen und Schwereanomalien führt zu der Anschauung, daß die Erde eine feste Kruste auf nachgiebiger Grundlage besitzt. Abweichungen vom normalen Verlauf der Schwerkraft sind nicht allein durch das sichtbare Relief der Erde hervorgerufen. Den sichtbaren Massenunregelmäßigkeiten entsprechen unsichtbare unterhalb, die die ersten ganz oder zum Teil kompensieren. Die oberste Erdkruste befindet sich danach in einer isostatischen Massenlagerung. Es ist nun die wichtigste Frage bis zu welcher Tiefe sich diese Kompensation vollzogen hat, in welcher Tiefe die Ausgleichfläche liegt. In dieser Tiefe müssen dann im selben Niveau gleiche Dichten und Drucke herrschen. Seitliche Drucke, gebirgsbildende Kräfte, Spannungen, die sich in Erdbeben auslösen, sind unterhalb nicht mehr zu erwarten.

Zur Frage dieser Ausgleichtiefe bringt die vorliegende Arbeit einen recht wichtigen Beitrag. Zwei Theorien werden dabei geprüft, erstens die Annahme von Pratt-Hayford, daß die Dichte unter den Kontinenten und Gebirgen bis zur Ausgleichfläche gleichmäßig geringer ist als unter den Ozeanen, und zweitens die Theorie von Airy, nach der die Kontinente und Gebirge in einer dichteren Lavaschicht schwimmen, wie Eisberge im Meer. Bei Pratt ist die Tiefe der Ausgleichfläche konstant und die Dichte der obersten Kruste von Ort zu Ort verschieden. Bei Airy ist die Dichtedifferenz zwischen Sial und Sima konstant und die Tiefe der Ausgleichfläche von Ort zu Ort verschieden.

71 Schweremessungen in Kaukasien und 48 in Europa werden nach beiden Theorien reduziert. Sodann wurden noch Schweremessungen aus Amerika, Asien, Afrika zum Vergleich herangezogen. Es werden nun die nach verschiedenen Methoden reduzierten Werte der Schwerkraft mit den theoretischen nach der Helmertschen Formel berechneten (γ_0) verglichen und so die Anomalien bestimmt.

Bei der Hayfordschen Methode wurden nacheinander drei verschiedene Tiefen der Ausgleichfläche angenommen (114, 156, 185 km). Bei den Airyschen Reduktionen wurden drei verschiedene Annahmen über den Dichteunterschied zwischen Sial und Sima, nämlich 0,2, 0,3 und 0,6 gemacht und entsprechende Annahmen über die Erdkrustendicke im Meeresniveau (77, 64, 40 km). Die Untersuchung ergab nun, daß die Airysche Theorie den Schwereverlauf etwas besser darzustellen vermag als die Hayfordsche. Besonders wurde dies an den Messungen aus Amerika, Kaukasien und den Alpen bestätigt. Die günstigste Ausgleichtiefe (nach der Prattschen) und die günstigste Erdkrustendicke (nach der Airyschen Theorie) sind nicht in allen Gebieten der Erde die gleiche. Die günstigste Krustendicke schwankt nach Airy zwischen 30 und 80 km für die verschiedenen Teile der Erde.

Die hier ausgeführte Reduktion zeigt ferner, daß entgegen den bisherigen Annahmen, Harz und Riesengebirge, sowie auch die Randsenke der Alpen, Karpaten und Kaukasiens und die Kettengebirge selbst isostatisch kompensiert sind.

Mittels der isostatisch reduzierten Schwerestationen wird die Schwereformel von neuem abgeleitet, und zwar zunächst gesondert aus Beobachtungen erstens in Europa und Afrika, zweitens in Amerika und drittens in Asien. Der Vergleich ergibt, daß die Schwere, wie schon Helmert zeigte, nicht nur von der Breite, sondern auch von der Länge abhängt. Die Zusammenfassung aller Stationen unter der Annahme, daß die Erde ein dreiachsiges Ellipsoid ist, ergibt dann die unten angeführte Formel. Zum Vergleich füge ich die von Helmert und die von Berroth abgeleitete Schwereformel bei.

Helmert (1915):

$$\gamma = 978{,}052\,[1 + 0{,}005\,285\sin^2\varphi - 0{,}000\,007\sin^2 2\varphi + 0{,}000\,018\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 17^0)];$$

Berroth (1916):

$$\gamma = 978{,}046\,[1 + 0{,}005\,296\sin^2\varphi - 0{,}000\,007\sin^2 2\varphi + 0{,}000\,012\cos^2\varphi\cos 2(\lambda + 10^0)];$$

Heiskanen (1924):

$$\gamma = 978{,}052\,[1 + \underset{\pm 3}{0{,}005\,285}\sin^2\varphi - \underset{\pm 6}{0{,}000\,007}\sin^2 2\varphi + \underset{\pm 3}{0{,}000\,027}\cos^2\varphi\cos 2(\lambda - 18^0)].$$
$$\pm 5$$

Die Abplattung beträgt nach Helmert in 10° W $\frac{1}{296{,}7}$; in 80° E $\frac{1}{298{,}9}$, nach Heiskanen in 18° E $\frac{1}{294{,}3}$ in 72° W $\frac{1}{299{,}0}$.

Die Differenz der Halbachsen im Äquator beträgt nach Helmert 230 m, nach Heiskanen 345 m ± 38, nach Berroth 150 m ± 58.

Die Erde muß somit wohl als ein dreiachsiges Ellipsoid angesehen werden.

Eine beigegebene Karte zeigt den Wert der Schwereanomalien in Europa, Nordafrika und Kaukasien, bezogen auf die aus der obigen Formel folgenden Normalwerte für die dreiachsige Erde. Die Anomalien zeigen einen recht regelmäßigen Verlauf.

G. Angenheister.

M. Lecat, Bibliographie de la Relativité. 8°. XII u. 291 S. u. Anhang. Brüssel, H. Lamertin. 1924.

Diese sehr gewissenhafte Zusammenstellung aller auf die Relativitätstheorie bezugnehmenden bis Anfang 1924 erschienenen Publikationen ist nach den Namen

der Autoren alphabetisch geordnet und enthält die genauen Zitate von über 3000 Büchern und Abhandlungen. Ein beigefügtes Hilfsregister bringt dieselben Arbeiten nochmals in chronologischer Reihenfolge. Verf. stellt ferner eine Statistik der räumlichen und zeitlichen Verteilung der relativistischen bzw. antirelativistischen Schriften und ihrer Autoren auf. Deutschland steht mit 350 Autoren an der Spitze, dann kommt England mit 185, Frankreich mit 150, Amerika mit 128. Eine Kurve, welche die Zahl der jährlich erschienenen Publikationen als Funktion der Zeit darstellt, zeigt ein scharf ausgeprägtes Maximum um 1922.

Ein Anhang zu dem Werke bringt noch die Bibliographien folgender Gebiete: Determinanten höheren Ranges, Variationsrechnung, trigonometrische Reihen, Azeotropismus. Thirring.

Tagesereignisse.

Klimatologische Tagung in Davos vom 17.—22. August, veranstaltet vom Institut für Hochgebirgs-Physiologie und Tuberkuloseforschung. Es sind folgende Abteilungen vorgesehen:

Allgemeines.
Physikalisch-meteorologische Abteilung.
Biologische Abteilung.
Klinische Abteilung.

Für die Physikalisch-meteorologische Abteilung sind folgende Vorträge vorgesehen:

Dr. Cuomo, Capri: Klimatologie, Klimato-Physiologie und Therapie am Golf von Neapel.
Prof. Dorno, Davos: Die Klimatologie des Hochgebirges.
Geh. Rat Prof. Dr. Hellmann, Berlin: Extreme der Klimawerte der Erde.
Prof. Dr. Maurer und Lüschg, Zürich: Verdunstungsmessungen an freien Wasseroberflächen im Hochgebirge.
Prof. Dr. Edgar Meyer, Zürich: Bedeutung des Ozongehaltes der Atmosphäre für die Sonnenstrahlung.
Prof. Dr. Wigand, Halle: Luftelektrizität der freien Atmosphäre.

Teilnehmerkarte: Frs. 20.—, inbegriffen die Kongreßverhandlungen. Die Kongreßteilnehmer genießen eine Reihe von Vergünstigungen. Wir nennen: Erlaß der Visumspesen, erhebliche Ermäßigung der Fahrtaxen (auf den Bündnerbahnen halbe Preise), günstige Unterkunftsverhältnisse (drei Kategorien: Frs. 10.—, 12.— und 15.— bei voller Pension). Anmeldungen an das Institut für Hochgebirgs-Physiologie und Tuberkuloseforschung in Davos.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. K. Kunz für Chemie, an der Universität Gießen Dr. Harald Geppert für reine und angewandte Mathematik, an der Universität Erlangen Dr. Erich Rosenheuer für Chemie, an der Technischen Hochschule Berlin der Leiter der physikalischen Abteilung der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Adlershof Dr. phil. H. Koppe für Physik, an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag Professor Dr. Karl Lichtenecker für Physik.

Ernannt: Der Dozent für Zementtechnik an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Hans Kühl zum Honorarprofessor ebenda, der ord. Professor Privatdozent für Astronomie an der Münchener Universität und Hauptobservator an der Sternwarte ebenda Dr. Ernst Großmann zum a. o. Professor, Eugenio Manzella zum Professor der chemischen Technologie an der Ingenieurschule zu Palermo, der Professor für Chemie am Kgl. Technischen Institut Piacenza Lina Modini wurde in gleicher Eigenschaft an das Kgl. Technische Institut Genua versetzt.

Berufen: Der Ordinarius und Direktor des Chemischen Instituts der Universität Göttingen Prof. Dr. Adolf Windaus nach Freiburg i. B. als Nachfolger von Professor H. Wieland, Prof. Andrea Sanna, Ordinarius für Chemie am Technischen Institut zu Sassari, erhielt einen Lehrauftrag für allgemeine Chemie an der Universität Sassari.

Ehrung: Professor Dr. Lise Meitner vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Chemie in Berlin-Dahlem hat für ihre Arbeiten über die β- und γ-Strahlen radioaktiver Substanzen den Lieben-Preis der Wiener Akademie der Wissenschaften erhalten, dem Geh. Rat Dr. R. Willstätter, ord. Professor für Chemie u. Direktor des chemischen Laboratoriums, ist in Anerkennung seiner Verdienste um den Ausbau des Deutschen Museums in München der goldene Ehrenring verliehen worden, Professor Dr. F. Plotnikow ist zum ordentlichen Mitglied von „American Elektrochemical Society", Columbia University, New York, gewählt worden, der Kantonchemiker und Lehrer an der Kantonschule in Schaffhausen Professor J. Meister wurde von der Eidgenössischen Technischen Hochschule in Zürich zum Ehrendoktor der Naturwissenschaften ernannt.

Auszeichnung: Die Akademie der Wissenschaften der Vereinigten Staaten hat dem Physiker Professor Nils Bohr in Kopenhagen in Anerkennung seiner Untersuchungen über den Bau der Atome die Barnard-Medaille verliehen.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt Geheimer Hofrat Dr. Karl Schering (am 21. April 1925), der Mathematiker der Universität Göttingen Geh. Rat Prof. Dr. Felix Klein in Göttingen.

Angebote.

Wir suchen
zu möglichst baldigem Eintritt
PHYSIKER
oder
INGENIEUR
mit elektrotechnischen Kenntnissen und englischen und französischen Sprachkenntnissen für die Literaturbearbeitung. Angebote mit Lebenslauf, Zeugnisabschriften, Gehaltsforderungen und möglichst Lichtbild erbeten unter Kennwort „Patent" an die
Angestellten-Vermittlungsstelle bei den Direktionen der Siemensfirmen, Verwaltungsgebäude, Berlin-Siemensstadt

Aus dem Nachlaß
eines Physikers (Privatdozent) größere Anzahl
Physikalische Apparate
meist elektrisch, **zu verkaufen.** Offt. „R. 504", **Gerstmann's Annoncen-Büro, Berlin W 9.**

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

MAX KOHL A.G.

Physikalische Apparate

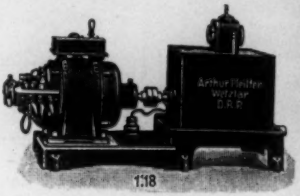
Demonstrations - Rundfunk - Empfangs - Apparate
Oelluftpumpen und Gebläse
Längen- und Kreisteilmaschinen
Komparatoren ✳ Funkeninduktoren
Megadiaskope ✳ Verdunkelungen
Experimentier-Schalttafeln
Laboratorienmöbel

Max Kohl A.-G. Chemnitz 4

Gründungsjahr 1876

Der Kauf von physikalischen Apparaten ist Vertrauenssache!

Pfeiffer's



1:18

Rotierende Öl-Luftpumpe D.R.P.

Quecksilber-Dampfstrahlpumpe
ganz aus Stahl D. R. P. angem.

1:20

15 Liter bis zum Aussetzen jeder Entladung in 10 Sek. vom Vorvakuum ab.

Listen von Abt. H anfordern.

Vgl. Techn. Physik, 1922, Heft 12. Phys. Ztschr. 1922, pag. 463.

Hochvakuum-Pumpen, Vakua bis $^1/_{1\,000\,000}$ mm Hg.
Saugleistung bis 120 cbm per Stunde

Photometer aller Systeme

Öl-Prüfapparate, Schnellviskosimeter usw.

Funken-Induktoren bis 1000 mm Funkenlänge

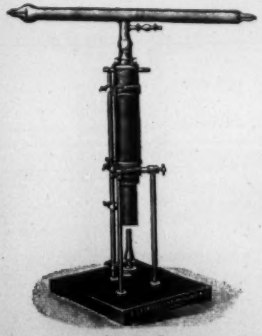
Oscillographen

Arthur Pfeiffer
Wetzlar 8

Telegr. Vakupfeif. — Tel. 85 u. 86.

Hochvakuum-Diffusions-Pumpe aus Metall
nach Prof. Gaede

D.R.P. und Auslandspatente


$^1/_{10}$ nat. Gr.

Saugleistung: 15 Liter per Sek.
Vorvakuum: 20 mm

„Vergl. Zeitschrift für Technische Physik, Jahrg. 1923, Nr. 10"

Alleinige Hersteller

E. Leybold's Nachfolger A.-G.
Köln a/Rhein, Brüderstr. 7

Sonderliste auf Wunsch

Für den Anzeigenteil verantwortlich S. Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.